

文章编号:1001-5078(2007)01-0066-03

# 高阶贝塞尔-高斯光束通过圆孔硬边光阑的传输特性

李汝烯<sup>1</sup>, 赵承良<sup>2</sup>, 陆璇辉<sup>2</sup>, 李汝恒<sup>1</sup>

(1. 大理学院物理与电子信息学院, 云南 大理 671003; 2. 浙江大学光学研究所, 浙江 杭州 310028)

**摘要:**文章通过把圆孔光阑函数展开为有限复高斯函数和的方法,用惠更斯-菲涅尔衍射积分,推导出了高阶贝塞尔高斯光束通过具有圆孔光阑的近轴 ABCD 光学系统的传输近似解析公式,并对高阶贝塞尔-高斯光束通过圆孔硬边光阑的传输特性进行了研究。分析结果表明,衍射特性与截断参数、贝塞尔函数的阶数以及光束的菲涅尔数等因素有关。

**关键词:**高阶贝塞尔-高斯光束;圆孔光阑;传输特性

**中图分类号:** O436      **文献标识码:** A

## Propagation Properties of the High-order Bessel-Gaussian Beam through a Circular Aperture

LI Ru-xi<sup>1</sup>, ZHAO Cheng-liang<sup>2</sup>, LU Xuan-hui<sup>2</sup>, LI Ru-heng<sup>1</sup>

(1. School of Physics and Electronic Information, Dali College, Dali 671003, China;

2. Research Institute of Optics, Zhejiang University, Hangzhou 310028, China)

**Abstract:** Based on the Huygens-Fresnel integral and the expansion of the hard aperture function into a finite sum of Gaussian functions, the approximation analytical expression of the high-order Bessel-Gaussian beam passing through a paraxial ABCD optical system with a circular aperture is derived. The propagation properties of the high-order Bessel-Gaussian beam through the circular aperture have been studied. The results show that the diffractive properties relative with the truncation parameter  $\beta$ , the order of Bessel function and Fresnel numbers are associated with the beam.

**Key words:** the high-order Bessel-Gaussian beam; circular aperture; the propagation properties

### 1 引言

近年来,由于空心光束在激光导管、光镊和原子操控等方面有着越来越多的应用而引起了人们广泛的关注。在实验上从20世纪90年代开始,有很多方法如横模选择法<sup>[1]</sup>、光学全息法<sup>[2]</sup>、空心光纤法<sup>[3]</sup>等各种方法用来产生各种不同的空心光束,并得到了一些很好的实验结果。在理论上人们也提出了很多模型来描述空心光束,最典型的的就是  $TEM_{01}^*$  光束,另外一种很好地用来描述空心光束的理论模型就是高阶贝塞尔-高斯光束<sup>[4]</sup>。这种光束无论在实验上还是理论上都已证明是一种非常理想和方便地用来描述空心光束的模型,可以很好地用于冷原子的引导、捕获等实验研究。

在实际的光学系统中,光束的传输总要受到光阑的限制,因此对光阑限制下光束的传输特性的研究是非常有意义的。高斯光束、厄米-高斯光束、贝塞尔-高斯光束、拉盖尔-高斯光束等通过有硬边光阑限制的传输特性已被研究<sup>[5-8]</sup>。本文对空心的高阶贝塞尔高斯光束通过圆孔光阑的传输特性进行分析。通过把圆孔光阑函数展开为复高斯函数的方法,推导出了高阶贝塞尔高斯光束通过圆孔光阑的传输近似解析公式。利用计算机数值计算,对高阶贝塞尔高斯光束通过圆孔光阑的衍射特性进行研究。

**作者简介:**李汝烯(1963-),男,副教授,主要从事激光光束变换方面的研究。E-mail: ynruxi@21cn.com.

**收稿日期:**2006-06-06

2 高阶贝塞尔-高斯光束通过硬边圆环形光阑近轴 ABCD 系统后的场分布

在柱坐标下,  $z=0$  入射面处的高阶贝塞尔-高斯光束的场分布为<sup>[5]</sup>:

$$E_1(r_1, \theta_1, z=0) = E_0 J_n(\alpha r) \exp\left(-\frac{r_1^2}{w_0^2}\right) e^{-in\theta_1} \quad (1)$$

式中,  $n$  是贝塞尔函数的阶数;  $E_0$  是一个常数,  $w_0$  是高斯光束的束腰;  $e^{-in\theta_1}$  是光束的相位项;  $\alpha$  是参数。

在近轴条件下, 高阶贝塞尔-高斯光束通过无光阑近轴光学系统后出射场的分布, 可由柱坐标下的 Collins 积分得到:

$$E(r, \theta, z) = -\frac{iE_0}{\lambda B} e^{ikz} \int_0^\infty r_1 dr_1 \int_0^{2\pi} d\theta_1 E_1(r_1, \theta_1, z=0) \cdot \exp\left\{\frac{ik}{2B}[Ar_1^2 - 2rr_1 \cos(\theta - \theta_1) + Dr^2]\right\} \quad (2)$$

式中,  $k$  是波数;  $\lambda$  是波长;  $A$ 、 $B$ 、 $C$  和  $D$  是近轴光学系统的变换矩阵元。

把式(1)代入式(2), 并应用积分公式:

$$e^{in(\frac{\pi}{2}-\theta)} J_n\left(k \frac{r_1 r}{L}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left[ik\left(\frac{r_1 r}{L}\right) \cos(\theta_1 - \theta) - in\theta_1\right] d\theta_1 \quad (3)$$

式(2)变为:

$$E(r, \theta, z) = -\frac{iE_0}{\lambda B} e^{ikz} \int_0^\infty r_1 dr_1 J_n(\alpha r_1) \cdot J_n\left(k \frac{rr_1}{B}\right) \exp\left\{\frac{ik}{2B}[Ar_1^2 + Dr^2]\right\} \quad (4)$$

若入射面是半径为  $\alpha$  的圆孔形光阑, 则通过光阑近轴光学系统后出射场的分布为:

$$E(r, \theta, z) = -\frac{iE_0}{\lambda B} e^{ikz} \int_0^\alpha r_1 dr_1 J_n(\alpha r_1) \cdot J_n\left(k \frac{rr_1}{B}\right) \exp\left\{\frac{ik}{2B}[Ar_1^2 + Dr^2]\right\} \quad (5)$$

引入圆孔光阑的窗口函数:

$$A_p(r_1) = \begin{cases} 0 & r_1 > \alpha \\ 1 & r_1 \leq \alpha \end{cases} \quad (6)$$

式(5)改写为:

$$E(r, \theta, z) = -\frac{iE_0}{\lambda B} e^{ikz} \int_0^\infty A_p(r_1) J_n(\alpha r_1) \cdot J_n\left(k \frac{rr_1}{B}\right) \exp\left[\frac{ik}{2B}(Ar_1^2 + Dr^2)\right] r_1 dr_1 \quad (7)$$

将硬边圆形光阑的窗口函数拓展为一组复高斯

函数之和:

$$A_p(r_1) = \sum_{h=0}^N A_h \exp\left(-\frac{B_h r_1^2}{\alpha^2}\right) \quad (8)$$

式中的  $A_h$  和  $B_h$  分别为拓展的高斯系数。这些系数可从计算机优化中得到。将式(8)代入式(7), 并应用积分公式

$$\int_0^\infty x e^{-\beta x^2} J_n(\alpha x) J_n(\gamma x) dx = \frac{1}{2\beta} \cdot \exp\left(-\frac{\alpha^2 + \gamma^2}{4\beta}\right) I_n\left(\frac{\alpha\gamma}{2\beta}\right) \quad (9)$$

和公式

$$I_n(x) = e^{\frac{i\pi \cdot n}{2}} J_n(-ix) = (-1)^n e^{\frac{i\pi \cdot n}{2}} J_n(ix) \quad (10)$$

式中,  $J_n(x)$  和  $I_n(x)$  分别为第一类  $n$  阶贝塞尔函数和变形贝塞尔函数。经积分运算得到出射场的分布:

$$E(r, z) = \frac{iE_0 \pi}{\lambda B} \sum_{h=1}^N \frac{A_h}{\omega_0^{-2} + iB_h \alpha^{-2} - ikA(2B)^{-1}} \cdot \exp\left[\frac{ikDr^2}{2B} - \frac{\alpha^2 + (kr/B)^2}{4(\omega_0^{-2} + B_h \alpha^{-2} - ikA(2B)^{-1})}\right] \cdot J_n\left(\frac{-k\alpha r}{2B(i\omega_0^{-2} + iB_h \alpha^{-2} + kA/B)}\right) \quad (11)$$

引入截断参数  $\beta = \frac{\alpha}{\omega_0}$ , 则式(11)变为:

$$E(r, z) = \frac{iE_0 \pi}{\lambda B} \sum_{h=1}^N \frac{A_h}{\omega_0^{-2}(1 + B_h \beta^{-2}) - ikA(2B)^{-1}} \exp\left\{\frac{ikDr^2}{2B} - \frac{\alpha^2 + (kr/B)^2}{4[\omega_0^{-2}(1 + B_h \beta^{-2}) + B_h \alpha^{-2} - ikA(2B)^{-1}]}\right\} \cdot J_n\left(\frac{-k\alpha r}{2B[i\omega_0^{-2}(1 + B_h \beta^{-2}) + kA/B]}\right) \quad (12)$$

3 数值计算和分析

由式(12)知, 出射场分布与截断参数、高斯光束束腰、光学系统参数等因素有关。在 Mathematica 的环境下, 对式(12)进行数值模拟。下面就光强分布与截断参数、高斯光束束腰和光束菲涅尔数 ( $N_w = \frac{\omega_0^2}{\lambda z}$ ) 等的关系进行讨论。计算时我们取  $\alpha = 1$ ,  $\lambda = 632.8 \text{nm}$ ,  $A_h$  和  $B_h$  的取值见文献[9], 如图 1 所示。

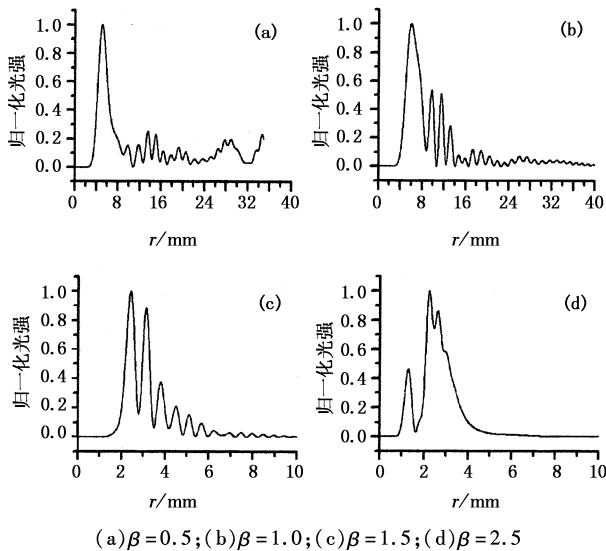
3.1 不同截断参数的光强分布

图 1 是  $\omega_0 = 1 \text{mm}$ ,  $n = 10$ ,  $N_w = 1$ , 通过光阑后在自由空间传播时, 不同截断参数的衍射光强分布图。从图可以看出, 截断参数越小, 光强分布范围越宽, 即衍射效应越强, 级次越多, 随着截断参数的增加,

级次逐渐减少,当截断参数大于3时,光强分布形状和无光阑情况一样。

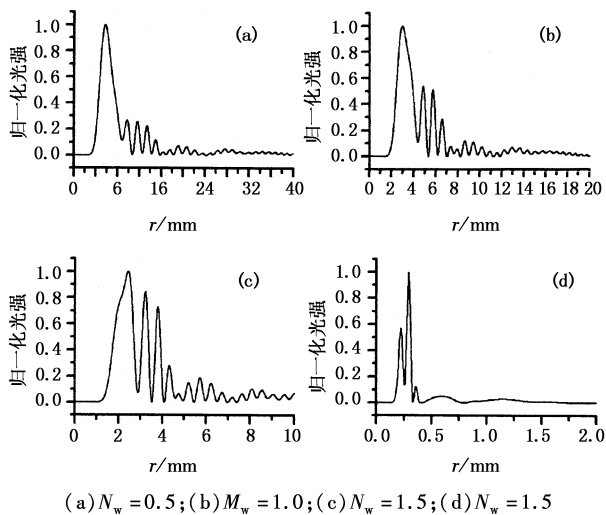
### 3.2 不同菲涅尔数的光强分布

图2是 $\omega_0 = 1\text{mm}$ ,截断参数 $\beta = 0.5$ ,贝塞尔函数的阶数 $n = 10$ 时,不同菲涅尔数观察面上的光强分布图。从图可知,菲涅尔数越小,光强分布范围越宽,衍射效应越明显。



(a) $\beta = 0.5$ ; (b) $\beta = 1.0$ ; (c) $\beta = 1.5$ ; (d) $\beta = 2.5$

图1 当 $n = 10, \omega_0 = 1\text{mm}$ 时  
不同截断参数的光强分布

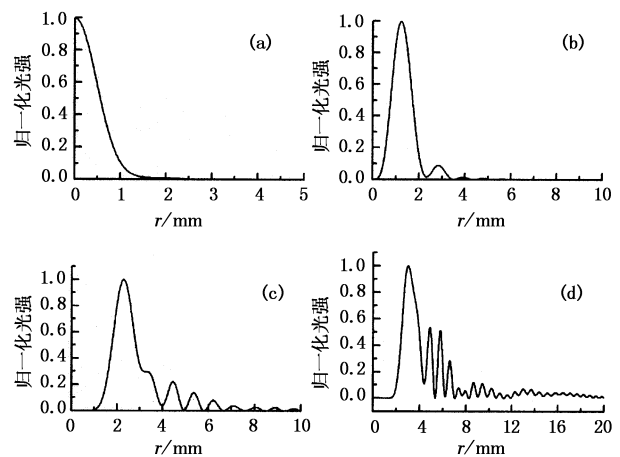


(a) $N_w = 0.5$ ; (b) $M_w = 1.0$ ; (c) $N_w = 1.5$ ; (d) $N_w = 1.5$

图2  $n = 10, \beta = 1, \omega_0 = 1.0\text{mm}$  菲涅尔数  
不同时的光强分布

### 3.3 不同阶数的贝塞尔函数的光强分布

图3是 $\omega_0 = 1\text{mm}$ ,截断参数 $\beta = 1.0$ ,光束菲涅尔数 $N_w = 1.0$ 时,贝塞尔函数阶数不同时贝塞尔-高斯光束的光强分布。从图看出,0阶贝塞尔高斯光束的光强分布和无光阑时的一样,说明0阶贝塞尔高斯光束为无衍射光束。贝塞尔函数的阶数越高,光强分布越宽,衍射效应越明显。



(a) $n = 0$ ; (b) $n = 2$ ; (c) $n = 6$ ; (d) $n = 10$

图3  $\beta = 1.0, \omega = 1.0, N_w = 1.0$ 时,  
不同贝塞尔函数阶数的光强分布

## 4 结论

本文用把光阑函数展开为复高斯函数的方法,用惠更斯-菲涅尔衍射积分公式,得到了高阶贝塞尔-高斯光束通过圆孔光阑的传输近似解析公式。数值计算结果表明,光强的分布与截断参数、光束的菲涅尔数以及贝塞尔函数的阶数有关。贝塞尔函数的阶数越高,贝塞尔-高斯光束的衍射效应越明显。

## 参考文献:

- [1] X Wang, G Littman. Laser cavity for generation of variable-radius rings of light[J]. Optics Lett. ,1993,18:767 - 768.
- [2] H S Lee, B W Atewart, K Choi, et al. Holographic nondiverging hollow beam[J]. Phys. Rev. ,1994, A49:4922.
- [3] Jianping Yin, Huang-RyoulNoh, et al. Generation of a dark hollow beams by small hollow fiber[J]. Opt. Commun. ,1997,138:287 - 292.
- [4] Lu X, Chen X, et al. High-Order Bessel-Gaussian Beams and its Propagation Properties [J]. Chin. Phys. Lett. , 2003,20:2155.
- [5] 徐海斌,甘亮勤,顾菊观. 厄米-高斯光束通过硬边光阑的自由传输特性[J]. 激光与红外,2005,35(10):779 - 882.
- [6] 谭荣清. 高斯光束通过光阑的传输[J]. 激光杂志,2003,24(3):7 - 8.
- [7] 刘学军,吕百达. 高斯光束通过光阑-透镜分离系统的焦移[J]. 激光杂志,1997,18(3):17 - 22.
- [8] 卿与三,吕百达. 受硬边光阑限制的拉盖尔-高斯光束的 $M^2$ 因子[J]. 中国激光,2003,30(3):231 - 236.
- [9] W J J, Breazeak M A. A diffraction beam field expressed as the superposition of Gaussian beams [J]. J. Acoust. Soc. Am. ,1988,83:1752 - 1756.