

# 基于遗传算法的多小波自适应阈值去噪研究

章琳, 汪胜前, 谢志华, 甘丽新, 舒正华

(江西科技师范学院光电子与通信重点实验室, 江西 南昌 330013)

**摘要:**针对噪声多小波分解后的尺度性与图像本身的特性,通过遗传算法自适应寻求图像的最小均方误差,提出了一种基于遗传算法的多小波自适应阈值去噪算法。实验结果证明,该算法明显优于传统算法,不仅能有效地滤除图像中的噪声,而且能较好地保留图像的边缘信息,具有更为理想的去噪效果。

**关键词:**图像去噪;遗传算法;图像奇异性;自适应阈值

**中图分类号:**TN911.73 **文献标识码:**A

## Multiwavelet Adaptive Threshold Denoise Based on Generation Algorithm

ZHANG Lin, WANG Sheng-qian, XIE Zhi-hua, GAN Li-xin, SHU Zheng-hua

(Key Laboratory of Optic-electronic & Communication, Jiangxi Science & Technology Normal University, Nanchang 330013, China)

**Abstract:** In view of the scaling of noise after multiwavelet decomposed and characteristic of image, adaptive to look for the least RMSE of image according to genetic algorithm, we propose a multiwavelet multilevel threshold denoise method based on generation algorithm. The experimental result shows that this algorithm is superior to the traditional methods, it not only can remove the noise of image, but can remain the better edge of image, and has more perfect denoise effect.

**Key words:** image denoising; generation algorithm; image characteristic; adaptive threshold

### 1 引言

小波理论自20世纪80年代末问世以来,小波由于其自身所具备的良好时频特性而受到广大学者的青睐,得到巨大发展,现已形成一个独立的研究体系,并广泛应用于图像处理、信号压缩、医学诊断和声音识别等领域。

小波变换由于具有多分辨率、低熵性、去相关性以及选基灵活性的特点<sup>[1]</sup>,使得当它应用于图像去噪时,其算法能达到最大均方误差最小意义上的较好效果,这是传统去噪方法所无法达到的。但由于单小波无法同时满足正交性、对称性与正则性等特性,所以限制了它的发展。多小波是在小波理论基础之上发展起来的,它是由一个以上的函数作为尺度函数生成的小波,它将单小波中由单个尺度函数生成的多分辨分析空间扩展为由多小波的多个尺度函

数生成,既保持了单小波的诸多优点,又克服了单小波的缺陷,能把正交性、光滑性、紧支性、对称性等完美结合起来<sup>[2]</sup>,从而得到广泛的关注。

目前,对于去噪方法的研究主要集中在两个方面,即阈值和收缩函数的确定。然而常用的一些去噪方法在确定阈值的时候很少考虑到图像自身的特性,导致这些阈值算法具有很大的局限性,达不到理想的去噪效果。本文的工作正是基于这种考虑,提出了一种基于遗传算法的多小波自适应阈值去噪算法,该阈值充分考虑了图像的自身特性,使得该阈值

**基金项目:**国家自然科学基金(No. 60662003, 60462003);江西省光电子通信重点实验室与江西财经大学创新基金。

**作者简介:**章琳(1982-),女,硕士研究生,主要研究方向为图像处理,数字电视及多媒体通信。E-mail: zhaze@yahoo.com.cn

**收稿日期:**2007-08-20

可以根据图像本身的特点及多小波的多分辨率特性自适应调整,以获得理想的去噪效果。

### 2 多小波变换

单小波只有一个尺度函数以及一个与之对应的小波函数,而多小波则有  $S(S \geq 2)$  个尺度函数和小波函数,令  $\phi_r(x) \in L(R^2) (1 \leq r \leq S)$  为多小波尺度函数,  $\psi_r(x) \in L(R^2)$  为对应的小波函数。与单小波一样,多小波也是基于多分辨分析(MRA)的,根据多分辨分析的思想,  $\phi_r(x), \psi_r(x)$  分别经过伸缩平移后生成子空间  $V_j, W_j^{[3]}$ :

$$V_j = \overline{\text{span} \left\{ 2^{-j/2} \phi_r \left( \frac{t}{2^j} - k \right), k \in \mathbf{Z} \right\}} \quad (1)$$

$$W_j = \overline{\text{span} \left\{ 2^{-j/2} \psi_r \left( \frac{t}{2^j} - k \right), k \in \mathbf{Z} \right\}} \quad (2)$$

其中,  $V_j$  满足单调性  $\dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset \dots$  以及逼近性  $\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j = L^2(R) \cap V_j = \{0\}$ ;  $W_j$  满足  $\bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} W_j = L^2(R)$ ;  $W_j$  是  $V_j$  的正交补空间,满足  $V_{j-1} = V \oplus W_j, V_j \cap W_j = \emptyset$ 。则多小波变换可表示为<sup>[4]</sup>:

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{L-1} H_k(\phi(2x-k)) \quad (3)$$

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{L-1} G_k(\psi(2x-k)) \quad (4)$$

其中,  $H_k, G_k (0 \leq k \leq L-1)$  分别表示  $S \times S$  低通滤波器矩阵和高通滤波器矩阵。

$\phi(x) = [\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_s(x)]^T$  为多尺度函数。

$\psi(x) = [\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_s(x)]^T$  为多小波函数。

同时,根据  $\phi(x), \psi(x)$  的正交归一性,  $H_k$  和  $G_k$  满足以下等式<sup>[5]</sup>:

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} H_k H_{k+2i}^T = 2\delta_{i,0} I_{r \times r} \quad (5)$$

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} H_k G_{k+2i}^T = 0_{r \times r} \quad (6)$$

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} G_k G_{k+2i}^T = 2\delta_{i,0} I_{r \times r} \quad (7)$$

其中,  $i \in \mathbf{Z}, I_{r \times r}, 0_{r \times r}$  分别为单位矩阵和零矩阵,

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

### 3 基于图像特性的自适应阈值

在通常的图像去噪算法中,是基于小波系数简单的统计特性来估计小波收缩阈值而进行研究的。其经典阈值为<sup>[6]</sup>:

$$\lambda = \sigma \sqrt{2 \ln N} \quad (8)$$

该经典阈值是基于一种普遍统计特征而得到的,是小波收缩最佳阈值的上限,但它并不是最佳收

缩阈值。它只考虑了图像的噪声特性,而没考虑图像本身的特性。对于不同的图像经过小波与多小波变换后,它们的信息分布都是不同的。对于纹理和边缘较少的图像,在小波域中其绝大部分信息在低频子带,高频子带中噪声占主要成分,这时选取较大的收缩阈值有利于消除图像噪声。而对于纹理和边缘较丰富的图像,随着纹理和边缘增加,表示图像奇异特性的信息将在小波域高频子带增多,此时应该恰当降低收缩阈值以便更多保留图像这部分信息<sup>[7]</sup>。

假设一幅含噪图像  $f(x,y)$  可表示为:

$$f(x,y) = g(x,y) + \sigma \times \eta \quad (9)$$

其中,  $g(x,y)$  为原始信号;  $\sigma$  为噪声方差;  $\eta$  为高斯白噪声,服从  $N(0,1)$  正态分布。在文献[8]中,Donoho 提出了两个滤波的前提条件:

(1) 光滑性:在大概率情况下,  $\hat{g}$  至少和  $g$  有同样的光滑度;

(2) 适应性:  $\hat{g}$  是最小均方差估计。

由条件(1)可知,当  $N \rightarrow \infty$  时,下式几乎以趋近于 1 的概率成立:

$$\|\hat{g}\|_F \leq C_1 \|g\|_F \quad (10)$$

其中,  $N$  为图像像素数;  $C_1$  为常数,且其依赖于函数空间  $F$ 。而这在小波域中就意味着:

$$\|\hat{\theta}_{i,j}\| \leq \|\theta_{i,j}\| \quad (11)$$

成立,其中  $1 \leq i \leq N$  为像素位置;  $j$  为分解尺度;  $\theta_{i,j}$  为信号在尺度  $j$  下第  $i$  个小波系数。

条件(2)可理解为对  $E(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\hat{g}_i - g_i|^2)$  求最小

值,这等价于求  $E \|\hat{\theta} - \theta\|_F$  最小值<sup>[8]</sup>,  $\hat{\theta}, \theta$  为系数向量;去噪目的即寻找一个具有最小均方根误差的估计:

$$E \|\hat{\theta} - \theta\|_F^2 \quad (12)$$

由式(9)、(11)和(12)可得,当  $N \rightarrow \infty$  时,下式以接近 1 的概率成立<sup>[8]</sup>:

$$\|\eta\|_F \leq \sqrt{2 \ln N} \quad (13)$$

在上式两边同乘一个噪声方差  $\sigma$ ,则可得:

$$\sigma \cdot \|\eta\|_F \leq \sigma \cdot \sqrt{2 \ln N} \quad (14)$$

由式(14)可知,等式左边即为图像中的噪声,右边即为经典阈值的最简单形式,其中图像中的噪声均要小于经典阈值的上限。

通常的图像小波去噪算法中,大多取经典阈值,而这必然会滤掉部分有用的图像信息。因此根据式

(14),本文提出了一种基于图像特性的阈值算法,即:

$$\lambda = c \times \sigma \times \sqrt{2 \ln N} \quad (15)$$

其中,系数  $c$  表示与图像本身有关的特性,并满足  $0 < c \leq 1.0$ 。

Xu<sup>[9]</sup>于1994年提出了空域相关滤波的算法,该算法中提到信号的突变点在不同尺度的同一位置都有较大的峰值出现,噪声能量却随着尺度的增大而减小,即噪声经过小波变换后其强度呈现一种随小波分解尺度  $j$  的增大而降低的特性<sup>[10]</sup>,自然地我们在确定阈值时就需考虑层间系数的相关特性,不能为所有分解层选取相同阈值,故根据图像小波系数的尺度性,对式(15)做进一步改进:

$$\lambda = c \times \sigma \times \sqrt{2 \ln N} / 2^{j-1} \quad (16)$$

该阈值不仅考虑了图像本身的特质,而且考虑了经多小波变换后层间系数的特性。现在的关键在于系数  $c$  的确定,我们特将其与遗传算法结合,求到最优或近似最优解。

#### 4 基于遗传算法的阈值优化

遗传算法借鉴了 Darwin 的进化论和 Mendel 的遗传学说,其本质是一种高效、并行、全局搜索的方法,它在搜索过程中自动获取和积累有关搜索空间的知识,并自适应地控制搜索过程以求得最优解<sup>[11]</sup>。遗传算法从一组随机产生的初始解(群体)开始搜索不断进化,称为遗传。遗传算法主要通过交叉、变异、选择运算实现。交叉或变异运算生成下一代染色体,称为后代。染色体的好坏用适应度来衡量。根据适应度的大小从上一代和后代中选择一定数量的个体,作为下一代群体,再继续进化,这样经过若干代之后,算法收敛于最好的染色体,它很可能就是问题的最优解或次优解。遗传算法中使用适应度这个概念来度量群体中的各个个体在优化计算中有可能到达最优解的优良程度。度量个体适应度的函数称为适应度函数。适应度函数的定义一般与具体求解问题有关<sup>[12]</sup>。遗传算法基本流程如图1所示<sup>[11]</sup>。

在本文中提出的基于遗传算法的多小波多层阈值去噪法的一般步骤可描述如下:

1)确定实际问题的参数集,这个算法最终要得到的是系数  $c$  的最优解或近似最优解,故该算法参数集就是系数  $c$ ;

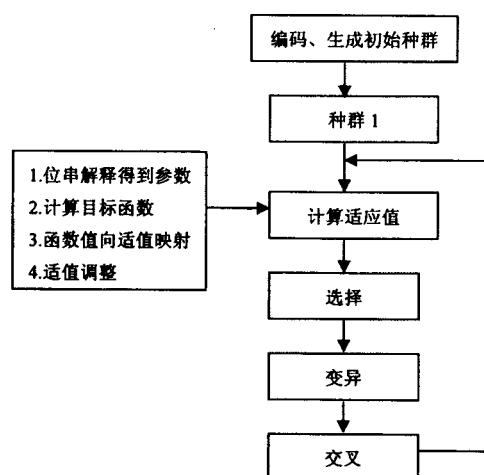


图1 遗传算法基本流程图

Fig.1 the basic flow chat of GA

2)对解空间中的解数据,即系数  $c$ ,进行编码,该算法采用实数编码,选择实数编码可使与问题领域相关启发信息的引入更加方便,这样可增加遗传算法的搜索能力;

3)实数编码后会随机产生一个分布均匀的初始串数据结构,组成一个初始种群,这里选择的初始种群大小为10,选择10是因为选择较大数目的初始种群可在搜索空间中的更多点搜索,因而容易找到全局最优解,但种群数量太大增加了每次迭代运算所需时间。根据多次仿真实验结果和算法性能综合考虑,我们选择初始种群大小为10;

4)由于求的是使图像 RMSE 最小的系数  $c$ ,故这里定义的适应度函数是以系数  $c$  为输入参数, RMSE 为输出参数的多小波多层阈值去噪函数;

5)按两两配对的原则将群体中的个体配对并执行交叉操作;依照个体适应度的大小,应用选择运算,获得良性个体群,这里所采用的交叉算法是算术交叉;变异算法是非均匀变异;选择算法是最优个体保留法;

6)根据设定的变异概率进行变异操作得到新一代个体,该算法的变异概率是0.1,选择稍大的变异概率可避免早熟收敛现象;

7)对产生的新一代个体进行结果统计,选择优异的个体,淘汰较差的个体,并将优异的个体保留作为下次迭代的父代个体;

8)对终止条件进行判断,如果满足则算法中止,否则转向步骤4),该算法选择的终止条件是迭代次数为35;

9)算法中止后产生经过优化的参数集,这就是实际问题的最优解或近似最优解。

5 实验结果分析

实验中利用多幅大小为  $256 \times 256$  或  $512 \times 512$  的标准图像进行测试。我们分别对各图像加入  $SNR = 6$  的高斯白噪声。实验中将小波、多小波的去噪方法与本文提出的方法进行 RMSE 比较,结果如表 1 所示。其中小波选择 db2 小波,多小波选择 Sa4 多小波,从结果可以看出多小波方法要优于小波,而本文提出的算法的图像去噪效果最优。另外,为了从视觉上更好地说明去噪后图像的效果,图 2 和图 3 分别给出了 Lenna 和 Stanwick 图像去噪后的重构图像。从图中可以看出,本文提出的算法相比传统算法效果都要好,不但边缘保留的比较好,而且最清晰。

表 1 图像 RMSE 对比结果

Tab. 1 image RMSE contrastive results

	小波	多小波	本文算法
Lenna	7.0659	7.0213	6.6981
Man	7.5047	7.2995	6.6388
Woman 1	6.6668	6.5380	6.1358
Baboon	8.4479	8.2457	6.0648
Stanwick	14.6856	14.5788	8.7892

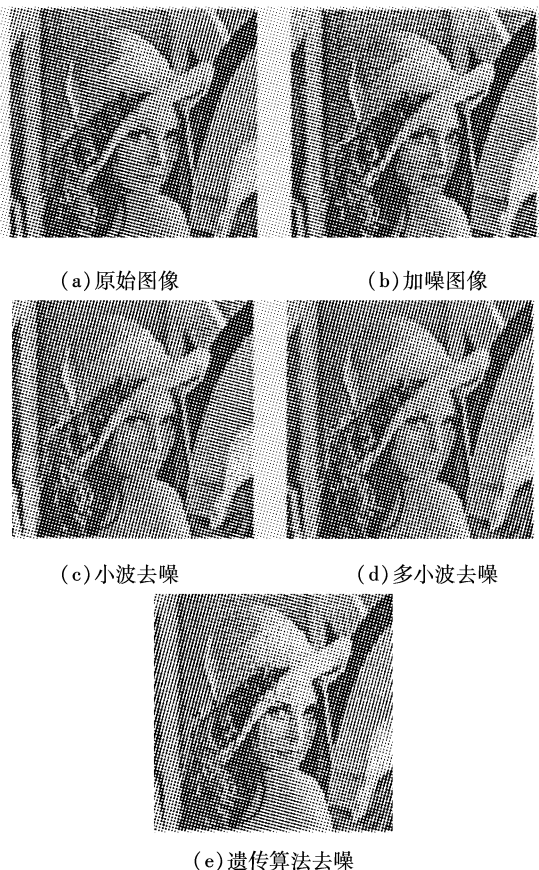


图 2 Lenna 重构效果对比图

Fig. 2 contrastive chart of reconstructive image Lenna

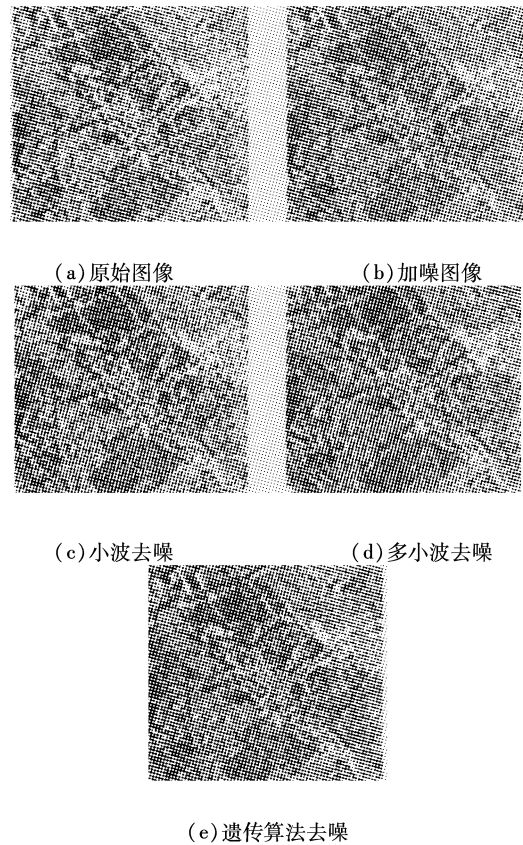


图 3 Stanwick 重构效果对比图

Fig. 3 contrastive chart of reconstructive image Stanwick

图 4 是图 Lenna 的遗传算法优化轨迹,其中,横坐标表示遗传算法中种群进化的代数,纵坐标表示各代中适应度最优的值  $W$ 。从图中可以看出在 25 ~ 50 代之间,优化结果已趋于稳定,但为了不失一般性,当初始种群为 10 时,实验中选取 35 代是比较合理的。

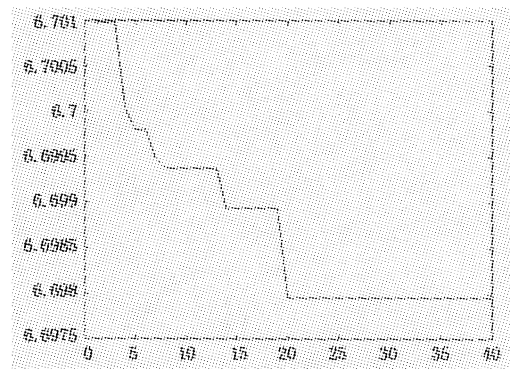


图 4 Lenna 的遗传算法优化轨迹  
Fig. 4 GA optimization trace of Lenna

表 2 反映了测试图像系数  $c$  为多少时能达到最小 RMSE。从表中数据可知,当图像本身的细节信息不是很多时,得到的系数  $c$  相对较大,一般集中在 0.7 ~ 0.9 之间,而相反的,当图像细节信息比较丰富时,如 Baboon 和 Stanwick,得到的系数  $c$  就较小。

表2 具有最小 RMSE 的  $c$  的值  
Tab. 2 the value of  $c$  having the least RMSE

	$c$	RMSE
Lenna	0.8541	6.6981
Man	0.8212	6.6388
Woman 1	0.8194	6.1358
Baboon	0.1150	6.0648
Stanwick	0.0146	8.7892

## 6 结论

本文提出了一种基于遗传算法的多小波多层阈值去噪法,该方法充分考虑了图像本身的特性,通过将图像奇异性与遗传算法相结合帮助我们寻求到了具有最优或近似最优 RMSE 的去噪阈值。结果表明,该算法比传统去噪法具有更好的去噪效果,不仅有效地抑制了噪声,而且保留了尽量多的图像细节。

### 参考文献:

- [1] Xie Jie-cheng, Zhang Da-li, Xu Wen-li. Overview on wavelet image denoising[J]. Journal of Image and Graphics, 2002, 7(3): 209 - 217. (in Chinese)
- [2] Fei Pei-yan, Guo Bao-long. A study on multiwavelet-based image denoising[J]. Journal of Image and Graphics, 2005, 10(1): 107 - 112. (in Chinese)
- [3] V Strela, A Walden. Signal and image denoising via wavelet thresholding: orthogonal and biorthogonal, scalar and multiple wavelet transforms, imperial college, statistics section[R]. Technical Report TR298201, 1998.
- [4] 张旭东, 卢国栋, 冯健. 图像编码基础和小波压缩技术——原理、算法和标准[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [5] L Shen, H H Tan, J Y Tham. Symmetric-antisymmetric orthonormal multiwavelet and related scalar wavelets[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2000, 8(3): 258 - 279.
- [6] Charnbolle A, De Vore, Nam-Yong Lee, et al. Nonlinear wavelet image processing: variational problems, compression, and noise removal through wavelet shrinkage[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1998, 7(3): 319 - 335.
- [7] Wang Shengqian. Image wavelet sparse representation and shrinkage denoising algorithm[D]. Shanghai: Shanghai Jiaotong University, 2002. (in Chinese)
- [8] Donoho D L. De-denoising by soft-thresholding[J]. IEEE Transaction Information. Theory, 1995, 41(3): 613 - 627.
- [9] Xu Yansun. Wavelet transform domain filter: a spatially selective noise filtration technique. IEEE Transaction on Image Processing, 1994, 3(6): 747 - 758.
- [10] 潘泉, 张磊, 孟晋丽, 等. 小波滤波方法及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.
- [11] 雷英杰, 张善文, 李续武, 等. MATLAB 遗传法工具箱及应用[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2005.
- [12] Ji Gen-lin. Survey on genetic algorithm[J]. Computer Application and Software, 2004, 21(2): 69 - 73. (in Chinese)