

# 基于现代控制理论的直流电机控制器的设计

金刚石, 张俊蓉, 吕宏宇, 王歆玥, 李婉怡, 鹿 玮  
(华北光电技术研究所, 北京 100015)

**摘 要:**直流电机的控制传统上采用 PID 算法, 为了达到更好的控制效果往往还引入电流环, 这将使计算量成倍增加; 基于现代控制理论设计的二次型最优控制器效果优秀、算法简单、实现容易、调整方便, 由于计算量小, 所以可以使用更廉价的处理器, 是廉价高性能控制器的首选。

**关键词:**电机控制; 现代控制理论; 二次型最优控制

**中图分类号:** TN86; TP273      **文献标识码:** A

## Design of the DC motor controller based on modern control theory

JIN Gang-shi, ZHANG Jun-rong, LÜ Hong-yu, WANG Xin-yue, LI Wan-yi, LU Wei  
(North China Research Institute of Electro-optics, Beijing 100015, China)

**Abstract:** Traditionally, PID algorithm is adopted in controlling DC motor. Sometimes current loop is also comprised in order to achieve better control performance, which makes calculation much huger. In this paper, we bring forward quadratic optimal controller based on modern control theory. This controller has excellent performance, realized easily and adjusted conveniently. The algorithm can be implemented by cheaper processor for its less complexity, and is the better choice in achieving cheap and high-capability controller.

**Key words:** DC motor; modern control theory; quadratic optimal controller

### 1 引 言

在低成本的两轴转台系统中,除了位置、速度、电流传感器和电机的选型要注意降低成本以外,控制器的设计也非常重要,一个好的控制算法可以降低计算量,这样就可以选用低成本低级别的处理器。

传统的 PID 控制算法每轴都有三个控制环,分别为电流环、速度环和位置环,位置环本文不讨论。用 PID 算法进行速度控制每个控制周期每轴需要进行两次 PID 计算,即两次  $u_i = K_p \cdot e_i + K_I \cdot \sum e_i + K_D \cdot (e_i - e_{i-1})$ ,粗略分析为每轴每次 8 次加法、6 次乘法。用二次型最优控制算法进行速度控制每个控制周期每轴需要进行一次如下计算  $u_i = -(k_1 i + k_2 \omega + k_3 \sum e)$ ,粗略分析为每轴每次 3 次加法、3 次乘法,相对 PID 算法而言,计算量减少一半以上。所以研究和实现二次型最优控制算法是很有意义的。

为了便于分析干扰力矩对系统的影响,本文建立了一个多输入单输出的数学模型,这正是现代控

制理论的长处,古典控制理论只能分析单输入单输出系统。

现代控制理论是使用状态空间表达式来描述系统的,  $\dot{X} = AX + BU$  为状态方程,  $Y = CX + DU$  为输出方程,状态方程和输出方程合起来称为状态空间表达式。  $A, B, C, D$  称为状态空间表达式系数,是可以唯一确定状态空间表达式的,当然也是可以唯一确定系统模型的,所以也常用状态空间表达式系数来表示一个系统的模型。

### 2 数学模型的建立

#### 2.1 电压平衡方程

依据图 1 和图 2 得电机电枢回路的电压平衡方程为:

---

作者简介:金刚石(1979-),男,在读工程硕士,工程师,主要从事控制器的设计与相关控制理论的研究,视频监控系统的研究与相关应用技术的研究。E-mail: chinajgs@yahoo.com.cn

收稿日期:2009-04-15;修订日期:2009-07-08

$$H_1 \begin{cases} L \frac{di}{dt} + Ri = E \\ T_m = K_a i \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $R$  为电枢电阻;  $L$  为电枢电感;  $J$  为转动惯量;  $K_f$  为黏性摩擦系数;  $K_a$  为转矩常数;  $K_b$  为反电动势常数;  $U_a$  为输入电压;  $U_e$  为反电动势;  $T_d$  为干扰力矩;  $i$  为电枢电流;  $\omega$  为电机转速。

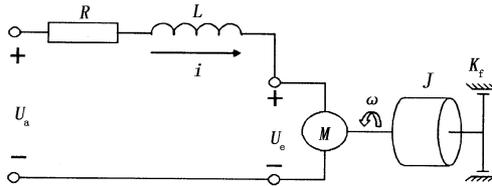


图1 电机模型图

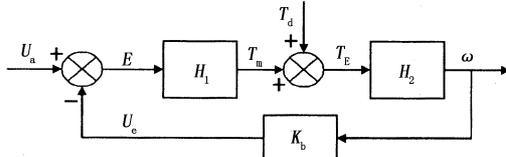


图2 电机系统方框图

设  $x_1 = i, y_1 = T_m, u_1 = E$ , 则:

$$\begin{cases} L \dot{x}_1 + R x_1 = u_1 \\ y_1 = K_a x_1 \end{cases} \quad (2)$$

化简得 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L} x_1 + \frac{1}{L} u_1 \\ y_1 = K_a x_1 \end{cases} \quad (3)$$

即状态空间表达式的系数为:

$$A_1 = -\frac{R}{L}, B_1 = \frac{1}{L}, C_1 = K_a, D_1 = 0$$

电机的电枢回路方框图如图3所示。

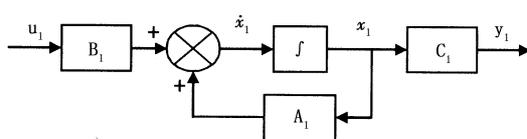


图3 电机的电枢回路方框图( $H_1$ )

2.2 力矩平衡方程

同样,依据图1和图2得电机力学回路的力矩平衡方程为:

$$H_2 \begin{cases} J \frac{d\omega}{dt} + K_f \omega = T_E \\ \omega = \omega \end{cases} \quad (4)$$

设  $x_2 = \omega, y_2 = \omega, u_2 = T_E$ , 则:

$$\begin{cases} L \dot{x}_2 + K_f x_2 = u_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \quad (5)$$

化简得 
$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -\frac{K_f}{J} x_2 + \frac{1}{J} u_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \quad (6)$$

即状态空间表达式的系数为:

$$A_2 = -\frac{K_f}{J}, B_2 = \frac{1}{J}, C_2 = 1, D_2 = 0$$

电机的力学回路主框图如图4所示。

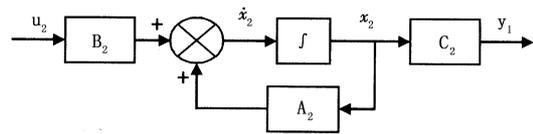


图4 电机的力学回路方框图( $H_2$ )

2.3 合并完整的模型

如图5所示,连接图3中的  $H_1$  与图4中的  $H_2$ 。

可得 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (U_a - K_b C_2 x_2) B_1 + A_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = (C_1 x_1 + T_d) B_2 + A_2 x_2 \\ y = x_2 \end{cases} \quad (7)$$

即 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 - K_b B_1 x_2 + B_1 U_a \\ \dot{x}_2 = C_1 B_2 x_1 + A_2 x_2 + B_2 T_d \\ y = x_2 \end{cases} \quad (8)$$

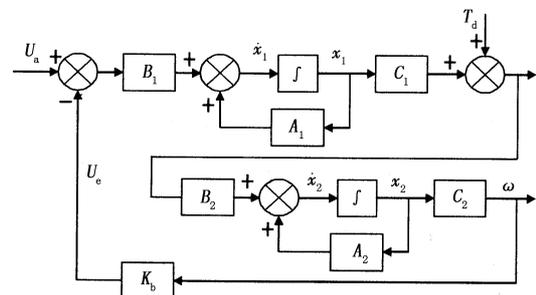


图5 电机系统详细方框图

设  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix}, Y = y, U = \begin{bmatrix} U_a \\ T_d \end{bmatrix}$

由此可得状态空间表达式的系数为:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_b}{L} \\ \frac{K_a}{J} & -\frac{K_f}{J} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix},$$

$$C = [0 \ 1], D = [0 \ 0]$$

至此,直流电动机的数学模型就建好了,状态变

量为  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix}$ , 输入向量为  $U = \begin{bmatrix} U_a \\ T_d \end{bmatrix}$ , 其中  $U_a$  是电机的输入电压,  $T_d$  是电机所受到的干扰力矩, 输出为  $Y = y = x_2 = \omega$ ,  $\omega$  是电机的角速度, 状态空间

表达式就是通用表达式, 即 
$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases}$$

电机系统的详细方框图如图5所示, 为了便于后面的分析, 可以将直流电动机的数学模型简化为如图6所示的符号。

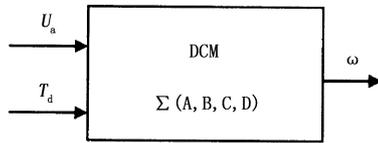


图6 电机的数学模型符号

### 3 控制器的设计

首先设计  $U_a$  到  $\omega$  的最优控制器,然后分析  $T_d$  对  $\omega$  的影响。

#### 3.1 最优控制器的引入

引入线性二次型最优控制器后系统的结构如图7所示。

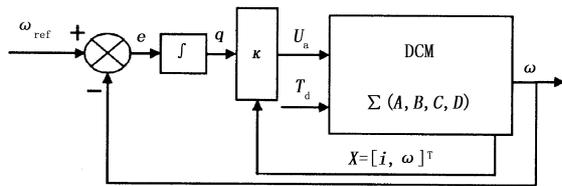


图7 最优控制器引入后的方框图

线性二次型解出的控制规律是状态变量的线性函数,可以方便的通过状态反馈实现闭环最优控制,在工程上具有重要意义。

因为控制目的是使  $\omega = \omega_{ref}$ ,即无静差,且开环传递函数无积分环节,所以要引入积分环节,使  $q = \int edt$ 。

求取  $K$  值时,先令  $\omega_{ref} = 0$ ,此时,控制器的输出  $U_a = -(k_1 i + k_2 \omega + k_3 q)$ ,设  $x_3 = q$ ,则  $\dot{x}_3 = e = -\omega = -x_2$ ,所以:

$$U_a = -(k_1 i + k_2 \omega + k_3 q) = -(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3) \quad (9)$$

此时,系统的状态空间表达式的系数为:

$$A' = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_b}{L} & 0 \\ \frac{K_a}{J} & -\frac{K_f}{J} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, B' = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C' = [0 \quad 1 \quad 0], \quad D' = [0 \quad 0]$$

本文所选取的性能泛函为:

$$J = \int_0^{+\infty} [a_1 q^2(t) + a_2 \omega^2(t) + a_3 U_a^2(t)] dt$$

$q^2(t)$  的系数  $a_1$  越大代表越重视动态过程的时间; $\omega^2(t)$  的系数  $a_2$  越大代表越重视动态过程的角速度误差; $U_a^2(t)$  的系数  $a_3$  越大代表越重视动态过程的电压变化。

至此,数学模型的目的已经很明确,以  $U_a$  作为输入, $\omega$  作为输出,求解  $K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$ ,使得性能泛函  $J = \int_0^{+\infty} [a_1 x_3^2(t) + a_2 x_2^2(t) + a_3 U_a^2(t)] dt$  取得最小值。

#### 3.2 控制器参数的求解

将  $J$  表示成  $J = \int_0^{+\infty} \{x^T Q x + 2x^T N u + u^T R u\} dt$ ,则

$K = R^{-1}(B^T S + N^T)$ ,其中  $S$  满足  $A^T S + S A - (S B + N) R^{-1}(B^T S + N^T) + Q = 0$ ,即是该 Riccati 方程的解。

求出  $K$  后,系统的状态方程变为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{K_b}{L}x_2 + \frac{1}{L}U_a \\ \dot{x}_2 = \frac{K_a}{J}x_1 - \frac{K_f}{J}x_2 + \frac{1}{J}T_d \\ \dot{x}_3 = \omega_{ref} - x_2 \end{cases} \quad (10)$$

化简得:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \left(-\frac{R}{L} - \frac{k_1}{L}\right)x_1 + \left(-\frac{K_b}{L} - \frac{k_2}{L}\right)x_2 + \left(-\frac{k_3}{L}\right)x_3 \\ \dot{x}_2 = \left(\frac{K_a}{J}\right)x_1 + \left(-\frac{K_f}{J}\right)x_2 + \frac{1}{J}T_d \\ \dot{x}_3 = -x_2 + \omega_{ref} \end{cases} \quad (11)$$

系统的输出方程仍然为  $y = x_2$ ,此时系统的输入

变为  $V = \begin{bmatrix} \omega_{ref} \\ T_d \end{bmatrix}$ 。

这样一来,系统闭环后的状态空间表达式的系数为:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} - \frac{k_1}{L} & -\frac{K_b}{L} - \frac{k_2}{L} & -\frac{k_3}{L} \\ \frac{K_a}{J} & -\frac{K_f}{J} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C} = [0 \quad 1 \quad 0], \tilde{D} = [0 \quad 0]$$

#### 3.3 实际系统的计算

实际的系统参数为:

$$R = 2.6 \Omega, L = 2 \times 10^{-3} \text{ H},$$

$$J = 1.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, K_f = 0.01 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s},$$

$$K_a = \frac{3.5 \text{ N} \cdot \text{m}}{5 \text{ A}} = 0.7 \text{ N} \cdot \text{m/A},$$

$$K_b = \frac{24 \times 60}{295 \times 2\pi} \text{ V} \cdot \text{s} \approx 0.7769 \text{ V} \cdot \text{s}$$

计算得:

$$K = \begin{bmatrix} 0.00965843992 \\ 21.65450273463 \\ -44.721359550 \end{bmatrix}$$

取近似值得:

$$K = [0.01 \quad 22 \quad -45]。$$

### 4 闭环系统分析

#### 4.1 系统模型具体化

代入实际系统的参数,得具体的系统模型为:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1305 & -11171 & 22361 \\ 0.583 & -0.0083 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.83 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C} = [0 \ 1 \ 0], \quad \tilde{D} = [0 \ 0]$$

此时,以角速度参考值  $\omega_{ref}$  作为输入,以角速度  $\omega$  作为输出的子系统的传递函数为:

$$H_{\omega} = \frac{1}{1 + 0.50 s + 0.10 s^2 + 0.0000767 s^3}$$

$H_{\omega}$  的阶跃响应如图 8 所示。

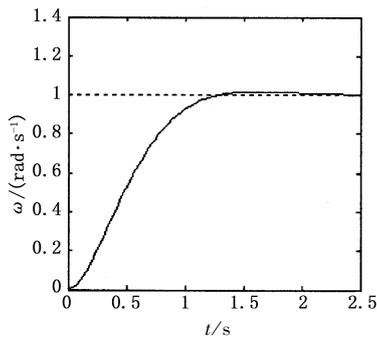


图 8 角速度的阶跃响应

以干扰力矩  $T_d$  作为输入,以角速度  $\omega$  作为输出的子系统的传递函数为:

$$H_T = \frac{0.08336 s + 0.0000639 s^2}{1 + 0.50 s + 0.10 s^2 + 0.0000767 s^3}$$

$H_T$  的阶跃响应如图 9 所示。

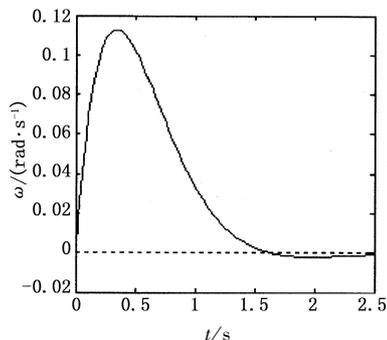


图 9 干扰力矩的阶跃响应

角速度参考值  $\omega_{ref}$  和干扰力矩  $T_d$  的综合作用如图 10 所示。

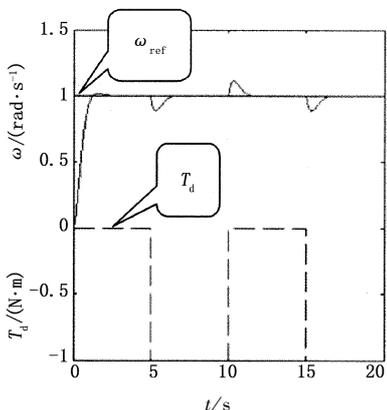


图 10 角速度与干扰力矩综合作用

从图 8、图 9、图 10 可以看出,该控制器可以很好地响应速度输入并抵抗力矩干扰,速度响应时间

约为 1.5 s,力矩响应时间也约为 1.5 s。

如果系统的电机和驱动电路能够输出更大的功率,还可以进一步修改性能泛函的参数,忽视动态过程的电压变化和能量损耗,获得更好的动态效果,如当  $K = [0.0443 \ 99.5 \ -1000]$  时,系统的响应如图 11 所示。

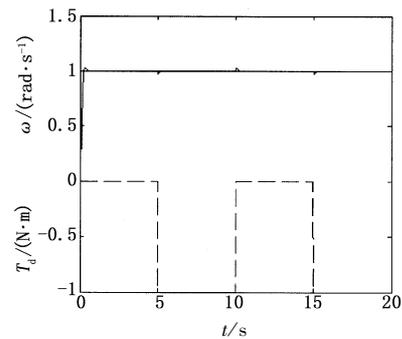


图 11 干扰力矩的阶跃响应

此时角速度输入响应时间不足 0.5 s,超调不足 3%,干扰力矩输入相应时间不足 0.3 s,超调不足 0.1%,性能非常优秀。

### 5 结论

该控制器在一款力矩电机直接驱动的两轴球形转台中获得了成功的应用,由于计算量小,使用了一片成本低廉的单片机作为唯一的处理器,实现了图 11 所示的控制效果,而且控制算法所消耗的处理时间(两轴)不足处理器的 40%。

基于现代控制理论设计的直流电机控制器效果优秀、算法简单、实现容易、调整方便,是廉价高性能控制器的首选。

### 参考文献:

- [1] 刘豹. 现代控制理论 [M]. 北京:机械工业出版社, 2000.
- [2] 夏德铃. 自动控制理论 [M]. 北京:机械工业出版社, 1999.
- [3] 薛定宇. 反馈控制系统设计与分析——MATLAB 语言应用 [M]. 北京:清华大学出版社, 2000.
- [4] 程卫国,冯峰,王雪梅,等. MATLAB 5.3 精要 编程及高级应用 [M]. 北京:机械工业出版社, 2000.
- [5] 强锡富. 传感器 [M]. 北京:机械工业出版社, 2000.
- [6] 李发海,王岩. 电机与拖动基础 [M]. 北京:清华大学出版社, 1994.
- [7] 于海生,等. 微型计算机控制技术 [M]. 北京:清华大学出版社, 1999.
- [8] Ogata K. State space analysis of control systems [M]. New Jersey: Prentice Hall, Inc, 1967.
- [9] Gibson J E. Nonlinear automatic control [M]. New York: Mc GrawHill Book Co. Inc, 1963.
- [10] Kuo B C. Automatic control systems [M]. 5th ed. New Jersey: Prentice-Hall, Inc, 1986.