

# 积分法求解长周期光纤光栅透射谱研究

杨颖<sup>1,2</sup>

(1. 临沂大学信息学院, 山东 临沂 276005; 2. 上海理工大学光电功能薄膜传感器实验室, 上海 200093)

**摘要:**基于光纤光栅的模式耦合理论,用德拜势能法对纤芯、包层内的电磁场进行矢量分析,得到纤芯及各包层中的各矢量场分量的表达式,求解出纤芯和包层模的耦合常数和有效折射率后,利用数值积分的方法通过求解耦合模方程得到光纤光栅的透射率。积分法是一种较为精确的求解透射谱方法,为长周期光纤光栅的优化设计和其在光纤通信、光纤传感领域的高精度测量提供理论依据。

**关键词:**耦合模理论;德拜势能法;长周期光纤光栅;积分法

**中图分类号:**TN253 **文献标识码:**A

## Study on transmission spectrum of long period fiber grating using integral method

YANG Ying

(1. School of Electronic Information, Linyi University, Linyi 276005, China;

2. Laboratory of Photo-electric Functional Film Sensors, College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

**Abstract:** Based on the coupled mode theory, the electromagnetic fields in core and cladding of long-period fiber grating are analyzed using Debye potential method. The vector expression of the field components in the core and the cladding are obtained. After solving the effective refractive index and the coupling constants of the core and cladding modes, transmission spectrum is got through solving the coupled mode equation by numerical integration method. The integral method is an accurate method for solving transmission spectrum. The research provides theoretical foundation for optimization and high sensitive measurement in the fields of optic fiber communications and sensors.

**Key words:** coupled-mode theory; Debye potential method; long-period fiber grating; integral method

### 1 引言

长周期光纤光栅是由 AT & T 贝尔实验室的 A. M. Vengsarkar 等人<sup>[1]</sup>于 1996 年用紫外光通过振幅掩模板照射氢载硅锗光纤首先研制而成的;1997 年 T. Erdogan<sup>[2-3]</sup>从模式耦合的角度深入研究了长周期光纤光栅的光谱特性,从而奠定了长周期光纤光栅的理论基础;目前周期为几十至几百微米的长周期光纤光栅,由于其在光纤通信和光纤传感领域的高灵敏度测量和多参量测量中存在重要的潜在应用价值,已成为一个新的研究热点<sup>[4-5]</sup>。

长周期光纤光栅通过纤芯导模与同向传输的包

层模的耦合,使满足相位匹配条件的导模耦合成为光纤中的辐射模而逃逸损失掉,致使它对某些特定频率的光波产生抑制作用,从而其透射谱中会出现一系列的谐波(损耗峰)。长周期光纤光栅的特性与其谐振波长密切相关,所以对其透射谱的研究就成为一个非常关键的问题。A. Yariv<sup>[6]</sup>将复杂的耦合模方程简化后提出的公式法可以较简便地求解单

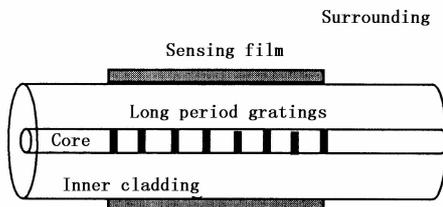
**作者简介:**杨颖(1970-),女,副教授,上海理工大学在读博士,主要从事光电子技术及光纤光栅传感器方面的研究。E-mail:ly-syyy168@126.com

**收稿日期:**2011-01-01;**修订日期:**2011-01-26

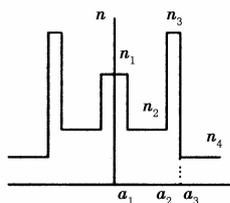
模式光纤光栅的透射谱,是目前求解透射谱较为常用的方法,文献[7]给出了公式法求解透射谱公式的详细推导过程,但公式法只能直接求解纤芯模与某一确定阶次包层模相耦合的透射谱,在求解包含所有模式的总的透射谱时还需将各单模式的透射谱进行叠加,这对所求透射谱的精确度造成了一定的影响,也给进一步的研究带来不便。本文提出一种基于模场矢量分析的通过数值积分求解透射谱的方法,对透射谱的求解过程进行深入分析,为长周期光纤光栅的优化设计及其在光纤通讯及光纤传感领域的实际应用提供一定的参考。

### 2 三包层长周期光纤光栅的模场矢量分析

图1(a)和图1(b)分别为长周期光纤光栅薄膜传感器的结构示意图和折射率分布示意图。芯层折射率  $n_1$ , 半径为  $a_1$ ; 内包层折射率  $n_2$ , 半径为  $a_2$ ; 第二包层折射率  $n_3$ , 半径  $a_3$ , 薄膜厚度  $h_3 = a_3 - a_2$ ; 外包层折射率  $n_4$ 。因为实际应用中所镀薄膜折射率一般大于纤芯折射率,故在此假设  $n_3 > n_1$ 。光栅区域的平均折射率改变量为  $\sigma$ , 数量级为  $10^{-4}$ 。



(a) 结构模型



(b) 折射率分布模型

图1 三包层长周期光纤光栅模型

假设所研究的长周期光纤光栅是采用振幅掩模紫外写入法制作的,光栅沿光纤纤芯轴向的周期性矩形折射率调制分布是圆对称的,即折射率调制在光纤纤芯横截面上是均匀的,只沿光纤轴向变化,且折射率改变只存在于纤芯中。

纤芯折射率分布函数可表示为:

$$n_{co}(z) = n_1 + \Delta n(z) \quad (1)$$

其中,  $n_1$  是未经紫外光照射的纤芯折射率;沿  $z$  轴的纤芯折射率改变量  $\Delta n(z)$  可以表示为:

$$\Delta n(z) = \sigma(z) \left[ 1 + \text{sccos} \left( \frac{2\pi}{\Lambda} \right) \right] \quad (2)$$

式中,  $\sigma(z)$  是一个光栅周期内折射率的平均变化幅度;  $\Lambda$  为光栅周期;  $s$  是与折射率调制有关的条纹可见度。

#### 2.1 包层模式在纤芯、包层、薄膜、外部环境中的各矢量场分量分析

用德拜势能法(Debye potential)<sup>[8]</sup>来研究三包层 LPFG 中的电磁场分布。电场、磁场强度矢量  $\{\vec{e}, \vec{h}\}$  和德拜势能  $\{\Psi_a, \Phi_a\}$  之间有如下关系:

$$\vec{e} = \vec{r}_0 \left[ \frac{\partial \Psi_a}{r \partial \phi} - (\beta / \omega \epsilon_i) \frac{\partial \Phi_a}{\partial r} \right] - \vec{\phi}_0 \left[ \frac{\partial \Psi_a}{\partial r} + (\beta / \omega \epsilon_i) \frac{\partial \Phi_a}{r \partial \phi} \right] - (\vec{z}_0 / j \omega \epsilon_i) (k^2 n_i^2 - \beta^2) \Phi_a \quad (3)$$

$$\vec{h} = \vec{r}_0 \left[ \frac{\partial \Phi_a}{r \partial \phi} + (\beta / \omega \mu) \frac{\partial \Psi_a}{\partial r} \right] - \vec{\phi}_0 \left[ \frac{\partial \Phi_a}{\partial r} - (\beta / \omega \mu) \frac{\partial \Psi_a}{r \partial \phi} \right] - (\vec{z}_0 / j \omega \mu) (k^2 n_i^2 - \beta^2) \Psi_a \quad (4)$$

其中,  $\vec{r}_0, \vec{\phi}_0, \vec{z}_0$  分别为径向、角向和轴向单位向量。

德拜势能  $\{\Psi_a, \Phi_a\}$  满足亥姆霍兹(Helmholtz)方程:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \phi} \right\} \cdot \{\Psi_a, \Phi_a\} = - (k^2 n_i^2 - \beta^2) \{\Psi_a, \Phi_a\} \quad (5)$$

对于如图1所示的三包层 LPFG,可通过求解上述亥姆霍兹方程,得到用德拜势能表示的电磁场表达式:

(1) 当  $0 \leq r \leq a_1$  时:

$$\Psi_{a1} = C_1 J_l(u_1 r) f_l(\phi) \quad (6)$$

$$\Phi_{a1} = A_1 J_l(u_1 r) g_l(\phi) \quad (7)$$

(2) 当  $a_1 < r \leq a_2$  时:

$$\Psi_{a2} = \{ C_2 J_l(u_2 r) + D_2 Y_l(u_2 r) \} f_l(\phi) \quad (8)$$

$$\Phi_{a2} = \{ A_2 J_l(u_2 r) + B_2 Y_l(u_2 r) \} g_l(\phi) \quad (9)$$

(3) 当  $a_2 < r \leq a_3$  时:

$$\Psi_{a3} = \{ C_3 J_l(u_3 r) + D_3 Y_l(u_3 r) \} f_l(\phi) \quad (10)$$

$$\Phi_{a3} = \{ A_3 J_l(u_3 r) + B_3 Y_l(u_3 r) \} g_l(\phi) \quad (11)$$

(4) 当  $r > a_3$  时:

$$\Phi_{a4} = D_4 K_l(w_4 r) g_l(\phi) \quad (12)$$

$$\Psi_{a4} = B_4 K_l(w_4 r) f_l(\phi) \quad (13)$$

式中,  $J_l, Y_l, K_l$  分别代表第一类贝塞耳函数、第二类贝塞耳函数和第二类变型贝塞耳函数。  $u_i^2 = k^2 n_i^2 - \beta^2, w_i^2 = \beta^2 - k^2 n_i^2, f_l = \exp(\pm j l \phi), g_l = \exp(\mp j l \phi)$ 。  $l$  为模式的阶数(又称角向序数)。  $u_i$  和  $w_i$  又称为相位参数,  $n_i$  为第  $i$  层 ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 的折射率, 传输常数  $\beta = k \cdot n_{eff}$ ,  $k$  为真空中的波矢,  $n_{eff}$  为有效折射率。  $A_i, B_i, C_i, D_i$  为标量场加权系数, 可根据矢量场的边界连续条件和能量归一化条件求出。

将上述德拜势能的解式(6)~(13)代入式(3)与式(4),即可推得包层模在三包层光纤光栅中的电磁场分布中电场、磁场分量表达式。包层模式在三包层 LPFG 中纤芯、包层、薄膜、外部环境中的各矢量场分量见文献[8]。

根据电、磁场切向分量  $e_\phi, e_z, h_\phi, h_z$  在边界处的连续条件,可得到一个 12 元线性齐次方程组:

$$M_{12 \times 12} [C_1, A_1, C_2, D_2, A_2, B_2, C_3, D_3, A_3, B_3, D_4, B_4]^T = 0 \quad (14)$$

其中,  $M_{12 \times 12}$  为系数矩阵。

分析各种模式的电、磁场分布时,必须求解出场分量中的加权系数  $C_i, D_i, A_i, B_i$ , 共 12 个。一个可行的办法是设法使其中的 11 个系数都能用剩下的 1 个系数表示出来 ( $C_1$  或  $A_1$ )。方程组(14)有无穷多组解,即加权系数  $C_i, D_i, A_i, B_i (i=1 \sim 3)$  均可由 1 个系数  $C_1$  表示出来,可通过分块矩阵的运算得以实现。系数  $C_1$  称为一阶各次包层模式的归一化常量,可由模式的功率归一化条件求得:

$$P = \frac{1}{2} \text{Re} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty r dr (E_r^{cl} H_\phi^{cl*} - H_r^{cl*} E_\phi^{cl}) = 1 \quad (15)$$

式中,  $E_r^{cl}, H_r^{cl}$  和  $E_\phi^{cl}, H_\phi^{cl}$  分别为一阶  $\nu$  次包层模式径向和角向电场、磁场分量;由于模式的电场、磁场各个分量均与模式归一化常量有关,因此根据模式的电、磁场分布,由上式可求出模式归一化常量  $C_1$ 。进而一阶  $\nu$  次包层模式径向和角向电场、磁场分量即可全部求出。

## 2.2 芯层模式的矢量场分量分析

纤芯基模在纤芯中的模场分布表示如下<sup>[2]</sup>:

$$\begin{cases} E_r^{co} = iE_{01}^{co} J_0(V\sqrt{1-br/a_1}) \exp(i\phi) \cdot \\ \quad \exp[i(\beta_{co}z - \omega t)] \\ E_\phi^{co} = -E_{01}^{co} J_0(V\sqrt{1-br/a_1}) \exp(i\phi) \cdot \\ \quad \exp[i(\beta_{co}z - \omega t)] \end{cases} \quad (16)$$

式中,  $b = (n_{\text{eff},co}^2 - n_1^2)/(n_2^2 - n_1^2)$ , 为归一化传输常数;  $n_{\text{eff},co}$  为有效折射率;  $E_{01}^{co}$  为纤芯模的模场归一化系数。

$$E_{01}^{co} \cong \left( \frac{Z_0 b}{\pi n_2 \sqrt{1+2b\Delta}} \right)^{1/2} \frac{1}{a_1 J_1(V\sqrt{1-b})} \quad (17)$$

式中,  $\Delta = (n_1 - n_2)/n_1$  为光纤的归一化折射率差;  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 377 \Omega$ 。  $V = u_1^2 + v_1^2$  定义为光纤归一化频率,其中  $u_1 = a_1 \sqrt{k^2 n_1^2 - \beta_{co}^2}$ , 称为径向归一化相移常数,  $w_1 = a_1 \sqrt{\beta_{co}^2 - k^2 n_2^2}$  称为径向归一化衰减常

数,  $\beta_{co}$  是纤芯模传播常数,  $\beta_{co} = k \cdot n_{\text{eff},co}$ ,  $k = 2\pi/\lambda$  为波数。由此,  $V = (2\pi/\lambda) a_1 \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ 。

## 3 光纤光栅模式耦合理论

对于理想的均匀光纤,纤芯及包层中存在的各阶模式相互正交,不存在模式耦合。当在光纤中写入光栅时,就破坏了光纤波导光学特性的一致性,产生了介电常数的扰动,这种沿光纤纵向的周期性扰动,使得各个模式在纤芯和包层中相互耦合。长周期光纤光栅的耦合模方程为<sup>[3]</sup>:

$$\begin{aligned} \frac{dA^{co}}{dz} &= i\kappa_{11}^{co-co} A^{co} + \frac{i}{2} \sum_{\nu} \kappa_{1\nu}^{cl-co} A_{\nu}^{cl} \times \\ &\quad \sum_{m=1}^{+\infty} [A_m \exp(-i2\delta_{1\nu-11}^{cl-co} z)] \\ \sum_{\nu} \left[ \frac{dA_{\nu}^{cl}}{dz} \right] &= +i\kappa_{1\nu-11}^{cl-co} A^{co} \times \sum_{m=1}^{+\infty} [A_m \exp(-i2\delta_{1\nu-11}^{cl-co} z)] \end{aligned} \quad (18)$$

其中,  $A^{co}$  是纤芯导模的正  $z$  向振幅;  $A_{\nu}^{cl}$  是一阶  $\nu$  次包层的正  $z$  向振幅。  $\kappa_{11}^{co-co}$  和  $\kappa_{1\nu-11}^{cl-co}$  分别为纤芯模的自耦合常数和纤芯模与一阶  $\nu$  次包层模之间的互耦合常数:

$$\begin{aligned} \kappa_{11}^{co-co}(z) &= \frac{\omega \epsilon_0 n_1^2 \sigma(z)}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{a_1} r dr (|E_r^{co}|^2 + |E_\phi^{co}|^2) \\ \kappa_{1\nu-11}^{cl-co}(z) &= \frac{\omega \epsilon_0 n_1^2 \sigma(z)}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{a_1} r dr (E_r^{cl} E_r^{co*} + E_\phi^{cl} E_\phi^{co*}) \end{aligned} \quad (20)$$

其中,  $\sigma(z)$  是纤芯折射率的一个周期内平均变化量;  $E_r^{co}$  和  $E_\phi^{co}$  分别是纤芯模式径向和角向电场分量;  $E_r^{cl}$  和  $E_\phi^{cl}$  为一阶  $\nu$  次包层模式径向和角向电场分量;  $\delta_{1\nu-11}^{cl-co}$  是纤芯导模与一阶  $\nu$  次包层模间的解调参量,定义如下:

$$\delta_{1\nu-11}^{cl-co} = \frac{1}{2} \left( \beta_{11}^{co} - \beta_{1\nu}^{cl} - \frac{2\pi}{\Lambda} \right) \quad (22)$$

根据  $\beta = k_0 \cdot n_{\text{eff}}$ , 只要求出纤芯模式有效折射率  $n_{\text{eff}}^{co}$  和包层模式的有效折射率  $n_{\text{eff}}^{cl}$  即可求得  $\delta_{1\nu-11}^{cl-co}$ 。  $n_{\text{eff}}^{co}$  和  $n_{\text{eff}}^{cl}$  分别通过求解三包层光纤光栅的芯层模式和包层模式的特征方程<sup>[2]</sup>得到。

## 4 透射谱的求解和数值模拟

若以光栅中点为  $z$  轴原点,长周期光纤光栅的边界条件如下:

$$A^{co}(z = -L/2) = 1, A_{\nu}^{cl}(z = -L/2) = 0 \quad (23)$$

长周期光纤光栅的透射率定义为:

$$T = A^{co}(L/2)/A^{co}(-L/2) \quad (24)$$

将  $\kappa_{11}^{co-co}$ ,  $\kappa_{1\nu-11}^{cl-co}$  和  $\delta_{1\nu-11}^{cl-co}$  分别带入式(18)~式

(19), 通过求解给定初值条件的偏微分方程组 (18) ~ (19), 得到  $A^{\omega}(L/2)$ , 代入公式 (24), 即可得到透过率  $T$ 。

计算所采用的光纤参数为:  $a_1 = 2.625 \mu\text{m}$ ,  $a_2 = 62.4 \mu\text{m}$ ,  $a_3 = a_2 + 300 \times 10^{-9}$ ;  $n_0 = 1.4681$ ;  $n_1 = 1.458$ ,  $n_2 = 1.45$ ,  $n_3 = 1.5$ ,  $n_4 = 1$ 。纤芯平均折射率的改变量为  $\sigma = 4 \times 10^{-4}$ , 光栅的周期  $\Lambda = 450 \mu\text{m}$ , 光栅的长度  $L = 1.2 \text{ cm}$ 。

图 2(a) 为模序数从 1 ~ 13 的光纤光栅的透射谱的模拟结果。在光栅长度和耦合系数一定的情况下, 当模序数从 1 变化到某一模序时 (在本文的光纤参数下, 这一模序为 9), 谐振峰峰值随波长逐渐变大, 谱宽度逐渐增加, 且各透射峰间距逐渐变大, 在 1720 nm 处,  $\nu = 9$  的包层模与纤芯基模耦合最大, 以后随模序数的增加, 谐振峰峰值随波长迅速变小, 谱宽度也迅速减小, 该结论与文献 [2]、[3] 的结论基本一致。

图 2(b) 为纤芯基模与一阶 7 次包层模耦合所得的透射谱, 可以看出, 除了在 1570 nm 处出现最大谐波以外, 在其两侧还对称地出现了小的谐波波峰, 并随着远离最大谐波的方向逐步减小。这些小的谐

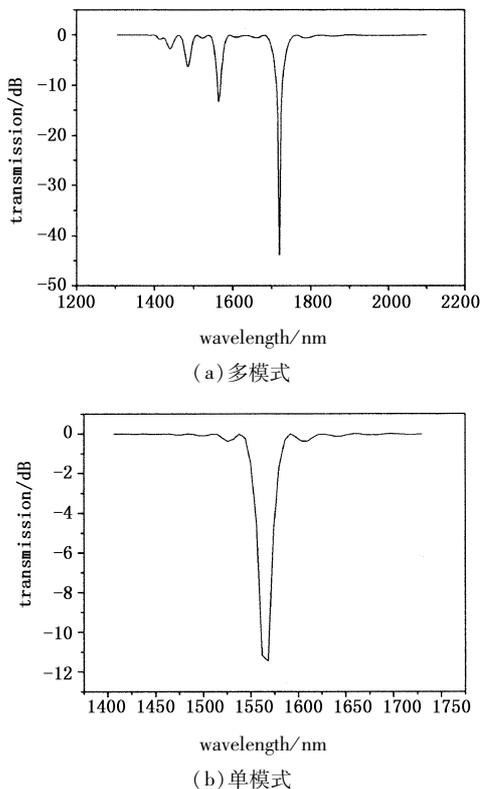


图2 积分法求解长周期光纤光栅透射谱

波的出现是由于基模与包层模之间发生了高阶的非线性耦合。因为它们的能量值远远小于最大谐波处的包层模能量, 所以一般情况下这些高阶模的耦合可以不予考虑。文献 [7] 给出了表征光栅透射谱主要特性的参数, 即谐振波长、峰值损耗和带宽的表达式。

## 5 结论

基于光纤光栅的模式耦合理论, 提出一种用积分法求解长周期光纤光栅透射谱的方法。即先用德拜势能法对纤芯、包层内的电、磁场进行矢量分析, 得到纤芯、包层、薄膜、外部环境中的各矢量场分量, 再求解出纤芯和包层模的耦合常数和有效折射率, 最后通过对耦合模方程进行积分得到纤芯和包层模的振幅, 进而求得光纤光栅的透射率。该研究为长周期光纤光栅的优化设计和其在光纤通信、光纤传感领域的精确测量提供理论依据。

## 参考文献:

- [1] G Agrawal, S Radic. Phase-shifted fiber Bragg gratings and their applications for wavelength demultiplexing [J]. IEEE Photon. Technol. Lett., 1994, 6(8): 995 - 997.
- [2] T Erdogan. Cladding-mode resonances in short and long period fiber grating filters [J]. J. Opt. Soc. Am. A, 1997, 14(8): 1760 - 1773.
- [3] T Erdogan. Fiber grating spectra [J]. J. Lightwave Technol., 1997, 15(8): 1277 - 1294.
- [4] M Hernaez, C R Zamarreño, I Del Villar, et al. Optical fiber humidity sensor Based on lossy mode resonances [J]. International Journal on Smart Sensing and Intelligent Systems, 2009, 2(4): 653 - 660.
- [5] Krishna Chandra Patra, Rashmi Singh, Enakshi Khular Sharma, et al. Analysis of transmission characteristics of long period gratings in tapered optical fibers [J]. Optical Society of America Optical Society of America, 2009, (6): 95 - 100.
- [6] A Yariv. Coupled-mode theory for guided-wave optics [J]. IEEE J. Quantum Electron, 1973, 9: 919 - 933.
- [7] Zhang Zijia. Fiber grating theoretical foundation and sensing technology [M]. Beijing: Science Press, 2009, 5: 143 - 148. (in Chinese)  
张自嘉. 光纤光栅理论基础与传感技术 [M]. 北京: 科学出版社, 2009, 5: 143 - 148.
- [8] Tsao C. Optical fiber waveguide analysis [M]. New York: Oxford University Press, 1992.