

# 一种基于小波变换的偏微分方程图像去噪方法

张力娜<sup>1,2</sup>, 李小林<sup>2</sup>

(1. 咸阳师范学院数学与信息科学学院, 陕西 咸阳, 712000; 2. 咸阳师范学院图形图像处理研究所, 陕西 咸阳, 712000)

**摘要:**针对纹理图像在去除噪声时, 纹理信息容易被磨光, 尤其是纹理的线状结构很容易被破坏的问题, 提出在小波域改进耦合 P-M 扩散与相干增强扩散的方法, 并用改进的方法对不同的子带进行扩散, 然后重构, 得到去噪图像。数值实验结果表明, 本文方法在达到一定降噪效果, 保持区域内部较好光滑性的同时, 对保持纹理信息、纹理的线状结构及纹理的光滑有很好的效果, 说明该方法对纹理图像去噪有较好的效果。

**关键词:**小波变换; 偏微分方程; 图像去噪; 纹理

**中图分类号:**TP391.41   **文献标识码:**A   **DOI:**10.3969/j.issn.1001-5078.2013.08.022

## Image denoising method of partial differential equation based on wavelet transform

ZHANG Li-na<sup>1,2</sup>, LI Xiao-lin<sup>2</sup>

(1. Department of Mathematics, Xianyang Normal University, Xianyang 712000, China;

2. Institute of Graphics and Image Processing, Xianyang Normal University, Xianyang 712000, China)

**Abstract:** The texture information is easy to be polished when denoising the images, especially the linear structure of the texture is easy to be damaged. A method is put forward that smooth sub-image by using modified method of combination of P-M diffusion and coherence enhancing diffusion in wavelet domain, the different wavelet sub-bands are diffused with the improved method and reconstructed, then the denoising image is obtained. Numerical experiments show that the proposed method have better effect on texture image denoising, especially on keeping the texture information, the linear structure and smoothness of the texture.

**Key words:** wavelet transform; partial differential equations; image denoising; texture

### 1 引言

图像信号在产生、传输、存储等过程中, 常常受到噪声的干扰, 影响了人们对正确信息的获取, 因此, 图像去噪是图像分析处理的前期必要工作。基于偏微分方程的方法<sup>[1-2]</sup>和基于小波变换的方法<sup>[3-4]</sup>是近年来图像去噪的主要方法。在此基础上, 人们进一步研究了两种方法之间的关系, 并把两种方法结合起来去噪, 如: 基于非线性小波阈值的各向异性扩散方法<sup>[5]</sup>, 小波方向子带偏微分方程遥感图像去噪<sup>[6]</sup>, 等等。

本文针对纹理图像在去除噪声时, 纹理信息不容易保持的问题, 提出小波域的耦合 P-M 扩散

与相干增强扩散的去噪模型, 首先将含噪声图像小波分解成低频子带和高频子带, 利用低频子带检测得到边缘指示函数, 然后根据各高频子带的图像特征及边缘指示函数选取不同权重的 P-M 扩散与相干增强扩散耦合进行扩散, 最后重构得到去噪图像。

### 2 小波阈值去噪

设有如下观测信号:

**基金项目:**陕西省自然科学基金(No. 2011JE011); 陕西省教育厅专项科研基金(No. 2013JK0602)资助。

**作者简介:**张力娜(1978-), 女, 讲师, 硕士, 研究方向为图像处理, 小波分析。

**收稿日期:**2013-01-14

$$f(t) = s(t) + e(t) \quad (1)$$

其中,  $s(t)$  为真实的信号;  $e(t)$  为方差  $\sigma^2$  的高斯白噪声, 服从  $N(0, \sigma^2)$  分布。

小波阈值去噪的基本思路是: ①先对观测信号  $f(t)$  做小波变换, 得到一组小波系数  $w_{j,k}$ ; ②由于信号  $s(t)$  的奇变位置和一些重要的信息对应各尺度上的小波系数  $w_{j,k}$  有较大的值, 其他大部分位置的  $w_{j,k}$  较小, 而对于噪声  $e(t)$  的小波系数  $w_{j,k}$  在每一尺度上的分布是均匀的, 所有小波系数在小波域上对噪声都有贡献, 因此, 选取适当的阈值  $\lambda$ , 低于  $\lambda$  的小波系数  $w_{j,k}$  认为是由噪声引起, 设为 0, 高于  $\lambda$  的小波系数  $w_{j,k}$  认为是由信号引起, 予以保留或收缩, 得到估计的小波系数  $\hat{w}_{j,k}$ ; ③利用新的小波系数  $\hat{w}_{j,k}$  进行小波重构得到去噪后的信号。

去噪过程中, 阈值  $\lambda$  的选取很重要, 如果  $\lambda$  取值太小, 会导致去噪后的图像包含过多噪声, 如果  $\lambda$  取值太大, 就会在去噪的同时也使部分重要的边缘或纹理信息丢失。Donoho 给出了较简洁的计算公式: 取阈值  $\lambda = \sigma \sqrt{2 \lg(N)}$  ( $N$  为信号的尺度或长度), 但必须考虑图像噪声统计的方差  $\sigma$  估计, 也就增加了准确估算阈值  $\lambda$  的难度。另外, 小波的阈值处理在一定程度上破坏了小波域的非线性相关性, 也会造成信号的失真。

### 3 耦合 P-M 扩散和相干增强扩散的去噪模型

Perona 和 Malik 提出的各向异性扩散的去噪模型<sup>[7]</sup>在对分片光滑图像去噪时能有效的保护图像的边缘信息, 但是, 由于 P-M 模型通过梯度模  $|\nabla u|$  的大小来控制扩散的强弱, 而没有考虑梯度的方向性, 使得边缘上的噪声不能被有效地去除, 一些细小纹理的线状特征丢失。Weickert 提出的相干增强扩散模型<sup>[1]</sup>的扩散张量既考虑到了梯度模的大小也考虑了梯度的方向, 使得扩散能够抑制边缘纹理处的噪声, 恢复断裂的线状特征, 但是, 图像噪声会影响边缘的定位, 使得在光滑区域产生很多虚假边缘, 严重影响图像去噪的质量。

为了弥补 Weickert 的扩散模型在处理光滑区域时的不足, 利用 P-M 模型在处理光滑区域的优势, 文献[8]提出了 P-M 扩散和相干增强扩散结合模型:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = o_1(x, y) \operatorname{div}[f(|\nabla u|) \nabla u] + o_2(x, y) \operatorname{div}[D \nabla u] \quad (2)$$

其中,  $0 \leq o_1(x, y) \leq 1$  为  $|\nabla u|$  的递减函数,  $o_2(x, y) = 1 - o_1(x, y)$ 。在边缘纹理处  $o_1(x, y) \rightarrow 0$ ,  $o_2(x, y) \rightarrow 1$  相干增强扩散为主要扩散, 能较好地保

护边缘纹理的线状结构, 抑制边缘上的噪声, 而在光滑区域  $o_1(x, y) \rightarrow 1$ ,  $o_2(x, y) \rightarrow 0$ , P-M 扩散为主要扩散, 从而得到光滑的区域内部。

### 4 小波域上的各向异性扩散方案

含噪声的图像  $u(x, y)$  经过一层小波分解, 分解成一个低频分量图 LL 和 3 个高频分量图 HL、LH、HH 分别表示垂直方向、水平方向、对角方向的边缘部分。低频分量 LL 还可以相同的方式再继续分解。分解后图像的平滑部分主要集中在低频上, 噪声和边缘纹理信息主要集中在高频部分。考虑到各高频分量的方向性以及 Weickert 相干增强扩散模型扩散的方向性, 本文在小波域上改进了耦合 P-M 扩散与相干增强扩散的模型, 利用改进的模型对各分量图的小波系数进行扩散处理, 再重构得到去噪后的图像。

耦合 P-M 扩散与相干增强扩散的模型综合了两者的优点, 但其中权重的选取很关键, 而根据含噪声图像的梯度  $|\nabla u|$  构造的权函数很容易受噪声干扰, 使得边缘、纹理的检测不够准确, 影响模型的效果, 故此本文作出如下改进。

首先, 对含噪声图像  $u(x, y)$  作小波分解, 得到含噪声较少的低频分量图  $u_{LL}$ , 对  $u_{LL}$  用偏微分方程模型<sup>[9]</sup>:

$$G(u, b) = \int (b^2 |\nabla u|^2 + (b-1)^2) + \alpha \int \eta(|\nabla b|) + \lambda \int |f-u|^2 dx dy \quad (3)$$

检测得到图像边缘指示函数  $b$ , 模型中第二项为  $b$  的正则项, 在一定程度上减少了虚假边缘的出现。

然后, 根据边缘指示函数  $b$  构造模型的权重函数

$$o_1(x, y) = \left( \frac{\arctan((b(x, y) - t)s)}{\pi} + 0.5 \right) (k - l) + l, \\ o_2(x, y) = 1 - o_1(x, y), \text{ 如图 1。}$$

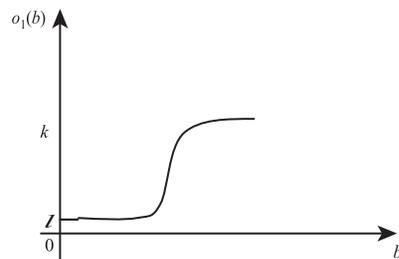


图1 函数  $o_1(b)$  的图形

其中,  $t$  为平移参数,  $s$  为伸缩参数,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $s > 0$ , 参数  $l$  为接近于 0 的非负数。  $o_1(x, y)$  是关于点  $(t, \frac{l+k}{2})$  对称的单调递减函数, 有  $0 \leq l \leq o_1(x, y) \leq k \leq 1$ ,  $o_2(x, y)$  是关于点  $(t, 1 - \frac{l+k}{2})$  对称的单调递增函数, 有  $0 \leq 1 - k \leq o_2(x, y) \leq 1 - l \leq 1$ 。当  $b$  的值趋向于 0 时, 就判定为图像边缘, 权重函数

$o_1(x,y)$ 为接近于0的值 $l$ 、 $o_2(x,y)$ 为接近于1的值 $1-l$ ,扩散模型中以相干增强扩散为主,以保护边缘、纹理的线状结构,抑制边缘上的噪声;当 $b$ 的值趋向于1时,就判定为图像的光滑区域,权重函数 $o_1(x,y)$ 为接近于1的值 $k$ 、 $o_2(x,y)$ 为接近于0的值 $1-k$ ,扩散模型中以P-M扩散为主,以保持区域内部的光滑性,而实际上 $k$ 的值可以取定为1,因为光滑区域内只需要P-M扩散,有相干增强扩散反而不好;而当 $b$ 的值在 $t$ 的附近时,不能判断是被噪声严重污染的光滑区域还是一些细小的边缘或纹理,此时权重函数 $o_1(x,y)$ 、 $o_2(x,y)$ 的取值在对称点附近,随 $b$ 的增大而减小或增大,模型中两种扩散的权重相当。

最后,根据小波分解得到的不同方向的高频分量图的特征,调节参数选取不同尺度的权重函数 $o_1(x,y)$ 和 $o_2(x,y)$ ,作用于各个高频分量图进行扩散,使得相干增强扩散在各个方向的分量图上能够更好的发挥保护边缘纹理线状结构的作用,同时也能保持结构区域内部较好的光滑性。

本文算法主要步骤:

步骤一:对含噪图像 $u(x,y)$ 进行小波分解,得到低频分量图 $u_{LL}$ 和低频分量图 $u_{HL}$ 、 $u_{LH}$ 、 $u_{HH}$ ;

步骤二:利用低频分量图 $u_{LL}$ 检测得到边缘指示函数 $b$ ,构造权重函数 $o_1(x,y)$ 、 $o_2(x,y)$ ;

步骤三:调节参数选取适合的权重,利用模型(2)分别对各分量图 $u_{LL}$ 、 $u_{HL}$ 、 $u_{LH}$ 、 $u_{HH}$ 作扩散去噪处理;

步骤四:对步骤三中处理后的各高频子带与低频子带重构得到去噪后的图像。

## 5 数值实验结果

本文选取大小为 $256 \times 256$ 的Barbara灰度图像作为实验图像,加入高斯白噪声,用P-M扩散和相干增强扩散结合的方法、对小波系数用P-M扩散的方法和本文的方法比较图像去噪的效果。本文中

用小波函数db1对图像进行2层分解,对各分量图像用本文方法进行扩散,然后重构得到去噪图像。表1是在不同噪声水平下,3种方法去噪后的峰值信噪比。

表1 不同噪声水平下3种方法去噪后的峰值信噪比

方法	噪声方差 $\sigma^2$		
	$\sigma^2 = 20$	$\sigma^2 = 30$	$\sigma^2 = 40$
噪声图像	22.085	18.563	16.065
小波系数用P-M扩散方法	25.996	24.135	22.002
P-M扩散和相干增强扩散结合方法	27.078	25.045	23.25
本文方法	26.856	24.983	22.809

图1为原始图像,图2、图3分别为加入方差为20和30的高斯白噪声的图像实验的结果,图4、图5分别为图2、图3局部放大的效果图,其中(a)为噪声图像,(b)为对小波系数用P-M扩散方法去噪后的图像,可以看出图像的结构区域内部光滑性较差,一些细小的边缘和纹理被磨光,纹理的线条是间断零乱的,(c)为P-M扩散和相干增强扩散结合方法去噪后的图像,(d)为本文方法去噪后的图像,(c)和(d)去噪的效果都比(b)的好,并有各自的优点。(c)的方法对保持结构区域的边缘有较好的效果,但是光滑区域内容易产生一些小的虚假边缘,本文方法得到的(d)在保持区域边缘的效果比(c)要差一些,但是区域内的光滑性较好,而且从人物头巾的纹理可以看出,本文方法保持了更多的纹理信息,并且纹理光滑,保持了较好的线状结构。



图1 Barbara



(a) 噪声图像

(b) 小波系数用P-M扩散方法

(c) P-M扩散和相干增强扩散结合方法

(d) 本文方法

图2 噪声方差为20的3种方法去噪效果



图3 噪声方差为30的3种方法去噪效果

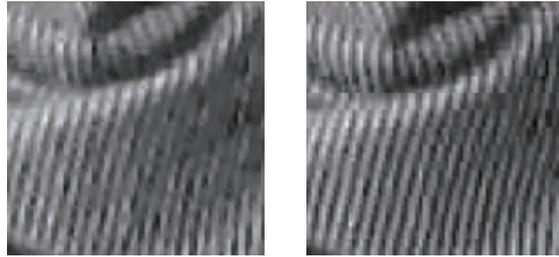


图4 噪声方差为20(图3)的放大效果图

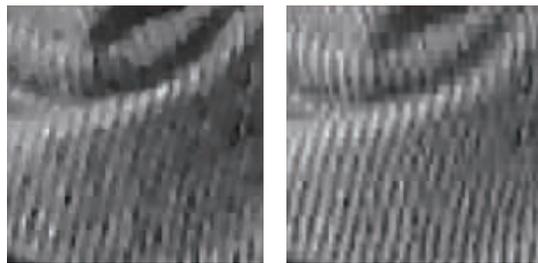


图5 噪声方差为30(图4)的放大效果图

## 5 结论

本文在小波域中改进了P-M扩散与相干增强扩散结合的方法,对各个分量图的小波系数进行扩散,再重构。实验结果表明,本文方法在达到一定降噪效果,并保持区域内部较好光滑性的同时,对保持纹理信息、纹理的线状结构及纹理的光滑有很好的效果,说明该方法对纹理图像去噪有较好的效果。

## 参考文献:

- [1] Weickert J. Coherence-enhancing diffusion filtering[J]. International Journal of Computer Vision, 1999, 31(2/3):111-127.
- [2] Wang Weiwei, Han Yu, Feng Xiangchu. Image denoising based on nonlocal diffusion[J]. Acta Optica Sinica, 2010, 30(2):373-377. (in Chinese)  
王卫卫, 韩雨, 冯象初. 基于非局部扩散的图像去噪[J]. 光学学报, 2010, 30(2):373-377.
- [3] Donoho D L. Denoising by soft thresholding[J]. IEEE Trans on Information Theory, 1995, 41(3):613-627.
- [4] Chen Xiaoxi, Wang Yanjie, Liu Lian. Deep study on wavelet threshold method for image noise removing[J]. Laser & Infrared, 2012, 42(1):105-110. (in Chinese)  
陈晓曦, 王延杰, 刘恋. 小波阈值去噪法的深入研究[J]. 激光与红外, 2012, 42(1):105-110.
- [5] Jiang Donghuan, Feng Xiangchu, Song Guoxiang. An anisotropic diffusion equation based on nonlinear wavelet shrinkage[J]. Acta Electronica Sinica, 2006, 34(1):170-172. (in Chinese)  
姜东焕, 冯象初, 宋国乡. 基于非线性小波阈值的各向异性扩散方法[J]. 电学学报, 2006, 34(1):170-172.
- [6] Wang Xianghai, Li Fang, Wang Shuang. Remote sensing image de-noising on partial differential equation in wavelet directional subband[J]. Journal of Image and Graphics, 2012, 17(5):721-728. (in Chinese)  
王相海, 李放, 王爽. 小波方向子带偏微分方程遥感图像去噪[J]. 中国图象图形学报, 2012, 17(5):721-728.
- [7] Perona P, Malic J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, 12(7):629-639.
- [8] Xie Huaying, Zhou Haiyin, Xie Meihua. Image denoising through combination of P-M diffusion and coherence enhancing diffusing[J]. Journal of Image and Graphics, 2005, 10(2):158-163. (in Chinese)  
谢华英, 周海银, 谢美华. P-M扩散和相干增强扩散结合的抑制噪声方法[J]. 中国图象图形学报, 2005, 10(2):158-163.
- [9] Ambrosio L, Tortorelli V. Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via  $\Gamma$ -convergence, Communication on Pure and Applied Mathematics, 1990, 43(8):999-1036.