

# 一种改进的小波阈值函数去噪方法

江虹, 苏阳

(长春工业大学电气与电子工程学院, 吉林 长春 130012)

**摘要:**针对传统小波阈值去噪算法中软阈值函数和硬阈值函数的不足,在现有文献设计的阈值函数的基础上,构造一个新的阈值函数,它不仅能克服软、硬阈值函数的缺点,同时对噪声的处理更具有灵活性。通过 Matlab 仿真,对软、硬阈值函数以及本文构造阈值函数的去噪效果,在信噪比(SNR)和均方根误差(RMSE)两个方面进行对比。结果表明,本文提出的阈值函数在信号去噪处理中,能获得更高的信噪比以及更小的均方根误差,具有很好的降噪效果。

**关键词:**小波阈值去噪;阈值函数;Matlab 仿真;信噪比;均方根误差

**中图分类号:**TN911 **文献标识码:**A **DOI:**10.3969/j.issn.1001-5078.2016.01.023

## Denoising method based on improved wavelet threshold function

JIANG Hong, SU Yang

(School of Electrical & Electrical Engineering, Changchun University of Technology, Changchun 130012, China)

**Abstract:** Aiming at the deficiencies of soft threshold function and hard threshold function in traditional wavelet threshold denoising algorithm, a new threshold function is created based on the existing threshold function in literatures. This function can overcome the disadvantages of soft and hard threshold functions, and have better flexibility in denoising. Through Matlab simulation, the denoising effects of soft and hard threshold function and the proposed function were compared in the SNR and RMSE. The simulation results indicate that the proposed function can get a higher SNR and smaller RMSE in denoising, and has a very good denoising effect.

**Key words:** wavelet threshold denoising; threshold function; Matlab simulation; SNR; RMSE

### 1 引言

在实际测量中,信号的采集和传输过程都会因一些干扰而带有不可预知的噪声,如果对这种信号直接处理,得到结果的误差很大,因此去噪是信号处理前必须经过的环节。一般的去噪方法有线性滤波和非线性滤波两种,这两种方式有个共同的缺点是变换后的熵增高,使信号的非平稳特性很难描述,而且也得不到信号的相关性<sup>[1]</sup>。近年来,人们更多地使用小波变换做噪声处理,小波变换以其低熵性、多分辨率等特性,使得它适合于信号的去噪过程。

运用小波变换处理噪声分为三类,第一类是基

于小波变换模极大值原理去除噪声;第二类是对含噪声信号作小波变换后,通过计算相邻尺间小波系数的相关性,根据相关性大小对小波系数进行取舍,最后重构得到去噪信号;第三类是阈值去噪,它是根据小波变换后信号和噪声的小波系数分布不同,对小波系数进行不同的处理实现的<sup>[2]</sup>。一般我们说的阈值去噪法是由 Donoho 在 1995 年提出的硬阈值去噪和软阈值去噪两种方法,这两种方法的计算量小,实现起来也简单,因而得到了广泛的应用。但是这两种方法也存在不足之处,采用硬阈值方法处理的小波系数在重构时可能产生震荡,而采用软阈值

基金项目:吉林省科技厅基金项目(No. 20140204007GX)资助。

作者简介:江虹(1970-),女,副教授,博士,研究方向为智能仪器与智能控制系统。

收稿日期:2015-04-10;修订日期:2015-05-06

方法处理的小波系数,会因为与真实小波系数存在的固定偏差,导致重构时精度下降<sup>[3]</sup>。由此可见,寻找一个适合的阈值函数对于去噪结果来说十分重要。本文在充分吸取软、硬阈值方法的优缺点基础上,综合考虑其他文献提出的阈值函数,构造出一个新的阈值函数,使之既能解决连续性差的问题,又能解决固定偏差问题。

## 2 小波阈值去噪原理

带噪信号经过小波变换后,信号的能量大部分集中在一些特定的小波系数内,但是噪声的能量在整个小波域内都是均匀分布的<sup>[4]</sup>,所以经小波变换后,噪声的能量分布范围广,其小波变换系数会比信号的小。因此只要选取一个合适的阈值,把变换后的小波系数和该阈值比较,当小波变换系数大于该阈值时,认为这部分系数主要由信号引起的,对其不作处理,称为硬阈值去噪法,如式(1),或者按某一个固定量收缩,称为软阈值去噪法<sup>[5]</sup>,如式(2);如果小波变换系数小于该阈值,则认为此时的系数主要由噪声造成,将这部分全置零,然后将处理后的小波系数进行小波重构,这样便可以实现保留有用信号而去除噪声的目的<sup>[6]</sup>,整个流程图如图 1 所示。

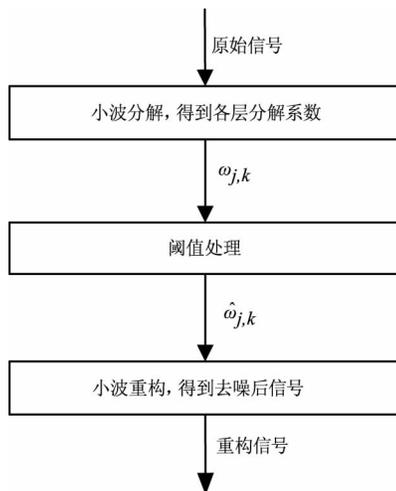


图 1 小波阈值去噪法流程图

Fig. 1 Flow char of wavelet threshold denoising

$$\hat{\omega}_{j,k} = \begin{cases} \omega_{j,k}, & |\omega_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |\omega_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (1)$$

$$\hat{\omega}_{j,k} = \begin{cases} \text{sgn}(\omega_{j,k}) (|\omega_{j,k}| - \lambda), & |\omega_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |\omega_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $\omega_{j,k}$  为原始信号经过小波变换后的小波系数,  $\hat{\omega}_{j,k}$  为估计的小波系数,  $\lambda$  为预设阈值, 函数示意图

如图 2 所示。从图中可以看出,硬阈值函数处理后的小波系数在  $\pm \lambda$  处是不连续的,因而变换后连续性差,经小波重构后的信号可能会有震荡产生;而软阈值函数处理的小波系数与实际的小波系数之间存在一定的偏差<sup>[7-8]</sup>,重构后的信号与真实信号间会有较大的误差,而且用软阈值法,这种误差是不可避免的。

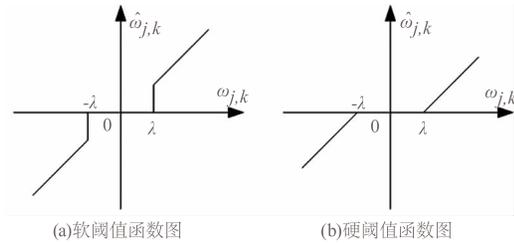


图 2 软、硬阈值函数示意图

Fig. 2 Diagram of the soft and hard threshold function

## 3 重新构造的小波阈值函数

在实际应用中,软、硬阈值函数由于自身存在的不足,使得在一些精度要求高的情况下无法使用。综合考虑它们的处理方法,本文构造一个新的阈值处理方法,通过变量  $\mu$  把两者结合起来,并且在极限条件下,新构造的阈值函数即为软、硬阈值函数,而在一般处理过程中,由于  $\mu$  的存在,使得它兼顾两种处理方法的同时,又能解决连续性差以及存有固定偏差问题。重新构造的阈值函数表达式如(3)所示:

$$\hat{\omega}_{j,k} = \begin{cases} \mu \omega_{j,k} + (1 - \mu) \text{sgn}(\omega_{j,k}) \left( |\omega_{j,k}| - \frac{\lambda}{\exp\left(\frac{|\omega_{j,k}|}{\lambda} - 1\right)^n} \right), & |\omega_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |\omega_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (3)$$

式中,  $\mu = 1 - e^{-\alpha(|\omega_{j,k}| - \lambda)^2}$ ;  $\alpha$  为正数;  $n$  为信号的分解层数。由函数式可知,构造的阈值函数与一般阈值函数处理方法相同,即把绝对值小于阈值部分置零,只是把绝对值大于或等于阈值的部分,用  $\mu \cdot \omega_{j,k} + (1 - \mu) \cdot \text{sgn}(\omega_{j,k}) \left( |\omega_{j,k}| - \frac{\lambda}{\exp(|\omega_{j,k}|/\lambda - 1)^n} \right)$  代替,作为新的小波系数。由式(3)可以看出当  $|\omega_{j,k}| \rightarrow \pm \lambda$  时,  $\hat{\omega}_{j,k} \rightarrow 0$ , 即  $\hat{\omega}_{j,k}$  在  $|\omega_{j,k}| = \pm \lambda$  处是连续的,所以与硬阈值函数相比,重构信号不会有震荡产生;而且随着  $\omega_{j,k}$  的不断增大,估计的小波系数  $\hat{\omega}_{j,k}$  也越来越接近真实小波系数,并且当  $|\omega_{j,k}| \rightarrow$

$\infty$  时,  $\hat{\omega}_{j,k}$  趋近于  $\omega_{j,k}$ , 即以  $\hat{\omega}_{j,k} = \omega_{j,k}$  为渐近线, 从而与真实小波系数之间的偏差越来越小, 消除了软阈值函数存在固定偏差问题。而且从表达式里可以看出, 当  $\alpha \rightarrow 0$  时即为软阈值函数,  $\alpha \rightarrow \infty$  时为硬阈值函数, 由此可见, 构造的阈值函数同时具有软阈值函数和硬阈值函数的特点, 灵活性很强。随着分解层数  $n$  的不同, 阈值的大小也可以随之自动调节, 因此具有很强的自适应能力。

#### 4 仿真与分析

为了验证提出的阈值函数是否有效, 用 Matlab 对其仿真, 将一段含有噪声的 Heavy sine 信号分别采用硬阈值、软阈值以及本文构造的阈值函数进行去噪实验。实验中含噪 Heavy sine 信号的信噪比为 11.824 dB, 采用 db1 小波基分解 4 层, 阈值  $\lambda = \sigma \sqrt{2\log N}$ , 其中,  $N$  为信号长度,  $\sigma$  是噪声的标准差。测试结果如图 3 所示。

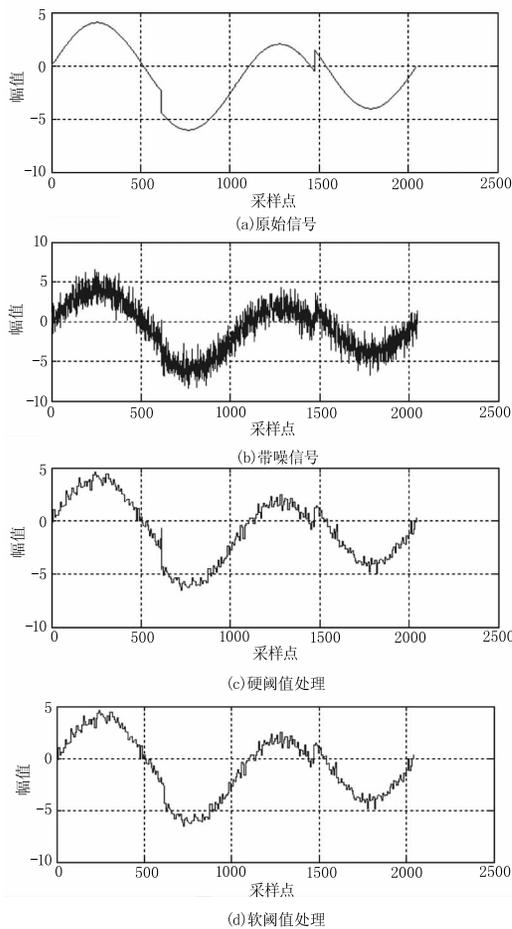


图3 三种阈值函数去噪效果图

Fig.3 The result of denoised signals processed by three kinds of threshold function

通过仿真图可以看出, 改进的阈值函数小波重构后的信号比其他两种方法处理的更平滑, 因而能够更好地还原原信号所包含的信息。通常我们用信噪比和均方根误差对去噪效果进行比较评价, 信噪比表示的是信号中含有噪声的多少, 其值越大, 信号中噪声含量越少; 均方根误差表示测量样本的可靠性, 其值越小, 测量可靠性越高。表达式如 (4) 和 (5) 所示。

$$SNR = 10\lg\left(\frac{\sum_{i=1}^n s^2(i)}{\sum_{i=1}^n (s(i) - \hat{s}(i))^2}\right) \quad (4)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (s(i) - \hat{s}(i))^2} \quad (5)$$

式中,  $s(i)$  为初始不带噪信号;  $\hat{s}(i)$  为去噪后的信号。表 1 给出了三种阈值函数去噪后的信噪比和均方误差, 从实验结果数据可以看出, 本文提出的阈值相比软、硬阈值方法, 在信噪比和均方根误差两个性能指标上均有明显的提高, 说明改进后的方法可靠性更高, 去噪效果更好。

表 1 三种阈值函数去噪结果对比

Tab.1 The comparison of denoised results processed by three kinds of threshold function

	硬阈值	软阈值	本文阈值
SNR	17.782	17.884	21.756
RMSE	0.3872	0.3827	0.245

#### 5 结论

本文首先介绍小波阈值去噪的基本原理以及去噪的一般步骤, 然后分析了软阈值和硬阈值函数的优缺点, 并在此基础上构造出一种改进的阈值函数, 使之既有软、硬函数的优点, 同时还能解决两个函数在实际处理中连续性差和存在固有偏差的问题。最后通过 Matlab 仿真, 结果表明, 在信噪比和均方误差两方面表明, 相比于软、硬阈值函数, 新提出的阈值函数可以获得更高和信噪比和更小的均方根误差, 去噪效果更好, 适用于含噪声信号的分析 and 处理。

#### 参考文献:

[1] WANG Bei, ZHANG Genyao, LI Zhi, et al. Wavelet threshold denoising algorithm based on new threshold

- function[J]. Journal of Computer Applications, 2014, 35(4):1499-1502. (in Chinese)
- 王蓓,张根耀,李智,等. 基于新阈值函数的小波阈值去噪算法[J]. 计算机应用, 2014, 35(4):1499-1502.
- [2] ZHANG Yuxin, TENG Guifa, ZHAO Yang, et al. Research on wavelet modulus maxima in the signal de-noising method[J]. Journal of Agricultural University of Hebei, 2009, 32(1):114-116. (in Chinese)
- 张玉新,滕桂法,赵洋,等. 基于小波变换模极大值的信号去噪方法研究[J]. 河北农业大学学报, 2009, 32(1):114-116.
- [3] ZHOU Xifeng, ZHU Wenwen, GUO Qiangang. The denoising of ultrasonic signal based on asymptotic semi-soft thresholding function[J]. Journal of Detection & Control, 2011, 32(2):35-39. (in Chinese)
- 周西峰,朱文文,郭前岗. 基于渐近半软阈值函数的超声信号去噪方法[J]. 探测与控制学报, 2011, 32(2):35-39.
- [4] YU Wenxin, ZHANG Qian. Signal de-noising in wavelet packet based on an improved-threshold function[J]. Communications Technology, 2010, 43(6):7-9. (in Chinese)
- 于文新,张谦. 基于改进阈值消噪算法的小波包降噪[J]. 通信技术, 2010, 43(6):7-9.
- [5] ZHOU Yanjiang, PAN Yishan. Method research and application of rock-burst signal denoising based on wavelet transformation [J]. Coal Mining Technology, 2009, 14(1):29-31. (in Chinese)
- 周彦江,潘一山. 基于小波变换的矿震信号去噪方法研究与应用[J]. 煤矿开采, 2009, 14(1):29-31.
- [6] XU Xi, SONG Shanshan. Research on the application of wavelet analysis in signal de-noising[J]. Ship Electronic Engineering, 2010, 30(3):185-187. (in Chinese)
- 徐溪,宋珊珊. 小波分析在信号消噪中的应用研究[J]. 舰船电子工程, 2010, 30(3):185-187.
- [7] CHEN Yong, HE Mingling, CHEN Lijuan, et al. Processing of FBG sensor signal by improved wavelet[J]. Infrared and Laser Engineering, 2013, 42(10):2784-2789. (in Chinese)
- 陈勇,贺明玲,陈丽娟,等. 改进的小波变换用于处理FBG信号[J]. 红外与激光工程, 2013, 42(10):2784-2789.
- [8] SHAO Hongxiang, GAO Hongfeng. Processing of FBG sensor signal with improved wavelet threshold de-noising method[J]. Laser & Infrared, 2014, 44(1):73-76. (in Chinese)
- 邵鸿翔,高宏峰. 改进小波阈值去噪方法处理FBG传感信号[J]. 激光与红外, 2014, 44(1):73-76.