文章编号:1001-5078(2020)11-1402-08 ·图像与信号处理·

基于最小二乘密度聚类的城市点云去噪算法

杨 鹏[1],刘德儿[1],刘靖钰[1],邹纪伟[1],张荷苑[2],陈增辉[1]
(1. 江西理工大学建筑与测绘工程学院,江西 赣州 341000;
2. 成都大学中国东盟艺术学院,四川 成都 610106)

摘 要:点云作为一种简便的三维表达方式,已经被大量应用在城市三维数字化中,但是城市对象的复杂多变,导致城市点云相较于其他场景点云,其较为复杂,去噪难度更高,去噪精度要求更高。为了解决城市点云的去噪问题,本文从高维特征密度空间出发,采用最小二乘密度聚类约束,遵循标准阈值原则设计了一种新的算法。本算法先构建高维特征密度空间,再用最小二乘算法求解各维度密度拟合曲线,最后根据标准阈值原则提取各维度合限点集的交集,即为目标点集。实验表明:本文算法针对城市场景中的点云具有较高的精度与较好的剔除效果,满足城市点云去噪任务的要求,达到了预期的效果。

关键词:最小二乘;密度聚类;城市点云;点云去噪;特征密度
中图分类号:TP391.41 **文献标识码:**A **DOI:**10.3969/j.issn.1001-5078.2020.11.019

Urban point cloud denoising algorithm based on least square density clustering

YANG Peng[1], LIU Deer[1], LIU Jing-yu[1], ZOU Ji-wei[1], ZHANG He-yuan[2], CHEN Zeng-hui[1]
(1. School of Architectural and Surveying & Mapping Engineering,
Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou 341000, China;
2. College of Chinese & Asean Art, Chengdu University, Chengdu 610106, China)

Abstract: As a simple three-dimensional expression, point cloud has been widely applied in the three-dimensional digitalization of cities. However, the complexity and variability of urban objects lead to the fact that compared with other cloud sites; point cloud is more complex, with higher difficulty in denoising and higher requirement for denoising accuracy. In order to solve the problem of urban point cloud denoising, this paper designs a new algorithm based on high-dimensional feature density space, using least-squares density clustering constraint and following the standard threshold principle. This algorithm first constructs the high-dimensional characteristic density space, then solves the density fitting curve of each dimension with the least square algorithm, and finally extracts the intersection of the convergence point set of each dimension according to the standard threshold principle, that is, the target point set. The experiment shows that the algorithm in this paper has high precision and good removal effect for point cloud in urban scene, which meets the requirements of urban point cloud denoising task and achieves the expected effect.

Keywords: east squares; density clustering; urban point cloud; point cloud denoising; the characteristics of density

基金项目:国家自然科学基金项目(No. 41361077;No. 41561085);江西省自然科学基金项目(No. 20161BAB203091)资助。
作者简介:杨 鹏(1993-),男,硕士研究生,主要从事数据处理研究。E-mail:yp_jxust_lab@163.com
通讯作者:刘德儿(1976-),男,博士,副教授,研究生导师,主要从事计算机视觉,三维点云的研究。E-mail:landserver@163.com
收稿日期:2019-12-30

1 引 言

3D 点云表达,作为对象表面的表达方式之一,在对象识别和三维重构等领域越发重要。目前 3D 点云数据获取主要通过三维激光扫描的方式。受益于三维激光扫描技术的发展,3D 点云密度越来越密,精度也越来越高。但是实际操作环境的复杂性,造成获取到的点云数据中不可避免的存在噪音点和错误点。而点云数据的质量对于最终三维重构成果的质量的影响十分巨大。因此,去除点云数据中的噪音点具有很高的实用和研究价值[1-15]。

目前,在点云去噪方面,已经成为近年来的一个研究热点。同时,国内外专家都做出了许多重要的研究成果,出现了一大批优秀的理论和算法,苏本跃等[16]基于 K-means 聚类对 RGBD 点云进行外部噪声去噪和精简,首先计算各点在局部曲面的曲率值,通过 K-means 对其进行聚类,在根据邻近点的曲率变化和该点到聚类中心的距离判断是否为噪声点,该算法可保留点云的原始特征;张巧英、田青华等[17-18]均运用了聚类算法,但是其算法中的邻域搜索普遍耗时较长,未凸显统计特性。冯东恒等[19]提出用共面法向量特征去除离群面的 RANSAC 算法,与传统 PCL 算法相比,该算法去噪效果好且执行效率高,但若地表复杂且包含较多树木,则影响较大;林万誉等[20]提出基于最小截取二乘法的分段拟合的滤波算法,在去除点云的同时能较好的保留局部细节特征,但仅局限于多曲面三维点云;赵凯等[21]提出的基于体素栅格的快速密度聚类算法,将点云进行体素栅格划分,缩小各个对象在空间上的搜索范围,再结合 DBSCAN 进行去噪,大幅度提高了运行效率。李明磊等[22]通过对平均点间距附加权重再作阈值判断,降低了对远距离离散点的误判,且通过八叉树格网结构提高了生长探测法的运行效率;李仁忠等[23]提出的基于方法库的点云模型去噪与精简算法,通过结合 PCL 中的直通滤波、统计滤波、半径滤波、双边滤波等,可有效对大尺度噪声点进行去除,但在该算法中统计滤波和半径滤波阈值设置决定运行效率。林洪彬等[6]提出基于参数自适应各向异性高斯核的散乱点云保特征去噪算法,利用切平面的投影和采样点构建相似度函数,从而确定有效领域,通过研究采用点的特征值和特征向量分布确定参数自适应的高斯核函数,从而完成点云去噪,该算法虽然较好地实现了点云去噪,但仍无法达到完全自适应。许龙等[7]提出了基于模糊 C 均值和均值滤波的点云去噪算法,首先用 C 均值去除大尺度噪声,再结合均值滤波对小尺度噪声进行光顺,该算法在去噪的同时较好地保留了边界特征。

上述去噪算法能够在一定程度上解决了目前的工程所需,但是现有的点云去噪算法的复杂度、自适应性、稳定性、快速性以及通用性等仍然有待提升,尤其是在一些极其苛刻、复杂的场景之下,错分率非常高。例如:林业园区、城市街区以及不规则、不平整地区等,对于这些地区的点云数据运用去噪算法,一定需要在某些阈值选取时加以限制。

2 原理与方法

本文基于三维激光扫描仪 RIEGL VZ-1000 收集的城市点云数据,该数据的角度分辨率为 0.0005°,100 米的扫描精度为 5mm,图 1 为 2019 年 4 月的部分城市点云数据,共 820025 个点,横纵方向扫描角设置为 0.02°,受扫描角度的限制、阴影遮挡与随机误差的影响,其中存在大量的噪声和空洞,且噪声点表现较为杂乱、规律不明显,因而对该场景下的噪声剔除需要更多的考虑内在随机噪声特性。通常城市点云的噪声主要来自于孤立噪声点、非地面的随机噪声点以及扫描稀疏边界等。因此,首先,建立近邻点特征空间;其次,确定噪声点与实体点的分界线;最后,基于特征空间的特征表达原则,再结合特征密度的分布进行聚类求交,最终可消除随机误差的影响。

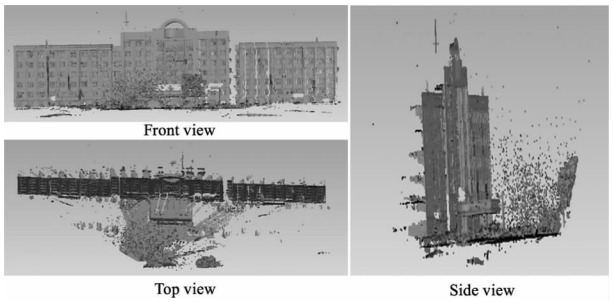

图 1 原始的点云

Fig. 1 Original point cloud

2.1 特征空间

城市点云本身所具有的复杂性,增加了噪声

点去除的难度,而去噪精度严重影响后期的实物提取与建模。城市点云噪声空间的分布规律具有不稳定的变化,运用简单的密度聚类将无法达到满意精度。由于各单独点没有空间特征及实体属性,因此不能以点为对象进行密度聚类,而需要对空间描述算子的密度聚类。然而,描述一群空间散乱点所需要的特征算子可以有很多个,因此,用于聚类的特征空间将会被提升到更高维度的空间中。

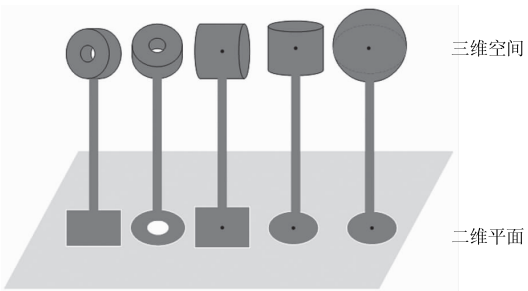

图 2 空间投影

Fig. 2 Spatial projection

如图 2 所示,不同的三维空间实体,在二维空间中的投影具有很大的差异性,有的是三维空间物体相同或相似的,在二维空间中完全不同,也有的是在二维空间投影相似的,其三维空间中的特性却完全不同。同理,更高维度空间向二维平面投影时,也会出现这种现象,因此不能单独在一个维度上对特征算子空间进行描述,这样会使得结果陷入局部最优解,使去噪精度变得不满足工程所需。

本文首要研究的着重点就是:在点云特征算子中,如何快速有效的解决高维空间密度聚类。经验表明:单一的一个特征值只能算是特征空间在某一特定方向的投影,其在一定程度上表现了原始数据的特性,但是这个过程并非一一映射,也会有其他方向的投影与该特征值相同或相似,这也就是点云特征空间聚类出现错分类的主要决定性原因。在复杂的点云空间中,每一个点都是独立的、附有特殊空间意义的存在,从本质上讲,每一个点都有属于它自己的特别属性,而我们要做的就是尽可能的将不同属性区分出来。

一个高维空间在低维空间上的投影可以有无数个,这些投影可以由一个集合表示,每一个投影都是这个集合中的一个元素,理论上投影元素越多精度越高。虽然用投影集合去分辨点云的属性在数学理论上是准确且可行的,但是在效率上确实无法估计。由于高维度的计算量很大,使得其效率低;低维度的计算量随少,使得其准确率低;因此,需要在效率和准确性之间进行平衡。

综上所述,本文提出一种最小二乘密度聚类去噪算法,旨在从高维特征空间中切分出具有实物属性的点云。首先,基于 KD-Tree 搜索各点的 k 个近邻点,再计算近邻点的统计特征;其次,由多个统计特征生成高维度的密度空间,并基于最小二乘解[24]求得密度空间在各维度上的回归线,并结合密度分析求得实物与噪声的分界线;最后,遍历密度空间,找出噪声点并剔除。

本文综合考虑几种经典的统计特征变化情况,统计特征具体为:均值 mean $= \sum_{j=1}^{k} d_{ij}/k$;方差 std $= \sum_{j=1}^{k} (d_{ij} - d_{\mathrm{mean}})^2/(k-1)$;斜率 slope $= \sum_{j=1}^{k} w_{ij} d_{ij} x_j / \sum_{j=1}^{k} w_{ij} x_j^2$;极值 range $= \max(d_{ij}) - \min(d_{ij})$;能量 energy $= \sqrt{\sum_{j=1}^{k} d_{ij}^2}$,每个统计特征均具有一定的物理意义,其中 d_{ij} 为邻域点到搜索点的距离。不同近邻点数所反映的特征空间不同,因此,选择合适的近邻点数对实验效果尤为重要。

2.2 最小二乘密度聚类算法

为了从空间特性上描述点云,本文对近邻点的邻域特征空间进行聚类,由于特征空间维度高于 3 个维度,可以构建高维度信息的聚类,并以任意两个维度的最小二乘解限制聚类边界是否超限,因此,本文提出一种基于最小二乘法实现城市点云的最小二乘密度空间聚类方法,并以此为基础进行去噪。

本文算法实现的具体步骤如下:

第 1 步:确定近邻点数 N,求得近邻特征空间,记为 $P_N(x_1、x_2、x_3、x_4、x_5)$;

第 2 步:将均值、方差、斜率、极值、能量进行排序,分别记为 $x_1、x_2、x_3、x_4、x_5$;

第 3 步:计算任意投影面的特征密度,并记为 $T_{ij} = \langle x_i \quad x_j \rangle$,其中 $1 \leqslant i < j \leqslant 5$, $i \in N^+$, $j \in N^+$;

第 4 步:基于最小二乘原则,取任意平面的投影密度二阶偏导为 0,即 $T_{2ij} = \frac{\partial^2 P_N}{\partial T_{ij}^2} = 0$,作为边界限制条件,同理,一阶偏导为常数,即 $T_{1ij} = \frac{\partial P_N}{\partial T_{ij}} = C_{ij}$,其中 $1 \leqslant i < j \leqslant 5, i \in N^+, j \in N^+$;

第 5 步:由密度空间的离散情况,截断阈值选择保留 2 倍中误差的有效数据作为所需的研究对象,其中 $2\delta = 95.44\ \%$;

第 6 步:由第 5 步的标准计算出密度空间各投影方向的截断阈值 ω_{ij} ,截断条件为 $p(T_{ij} \geqslant \omega_{ij}) = 95.44\ \%$,各投影方向的有效数据为 $D_{ij} = T_i(T_i \leqslant \omega_i)$,最终将各投影方向的有效数据取交集,即为在高维空间中的有效点集 $Q_{ij} = D_{12} \cap D_{13} \cdots \cap D_{45}$ 。

3　实验结果与分析

对特征密度空间进行分析,需要充分考虑高维度密度空间的特性,以此分析各投影方向上密度的紧密性,即去噪能力的强弱,分析结果如下图 3、图 4 所示。图 1 中的(a)、(b)、(c)、…、(j)依次为各投影面。

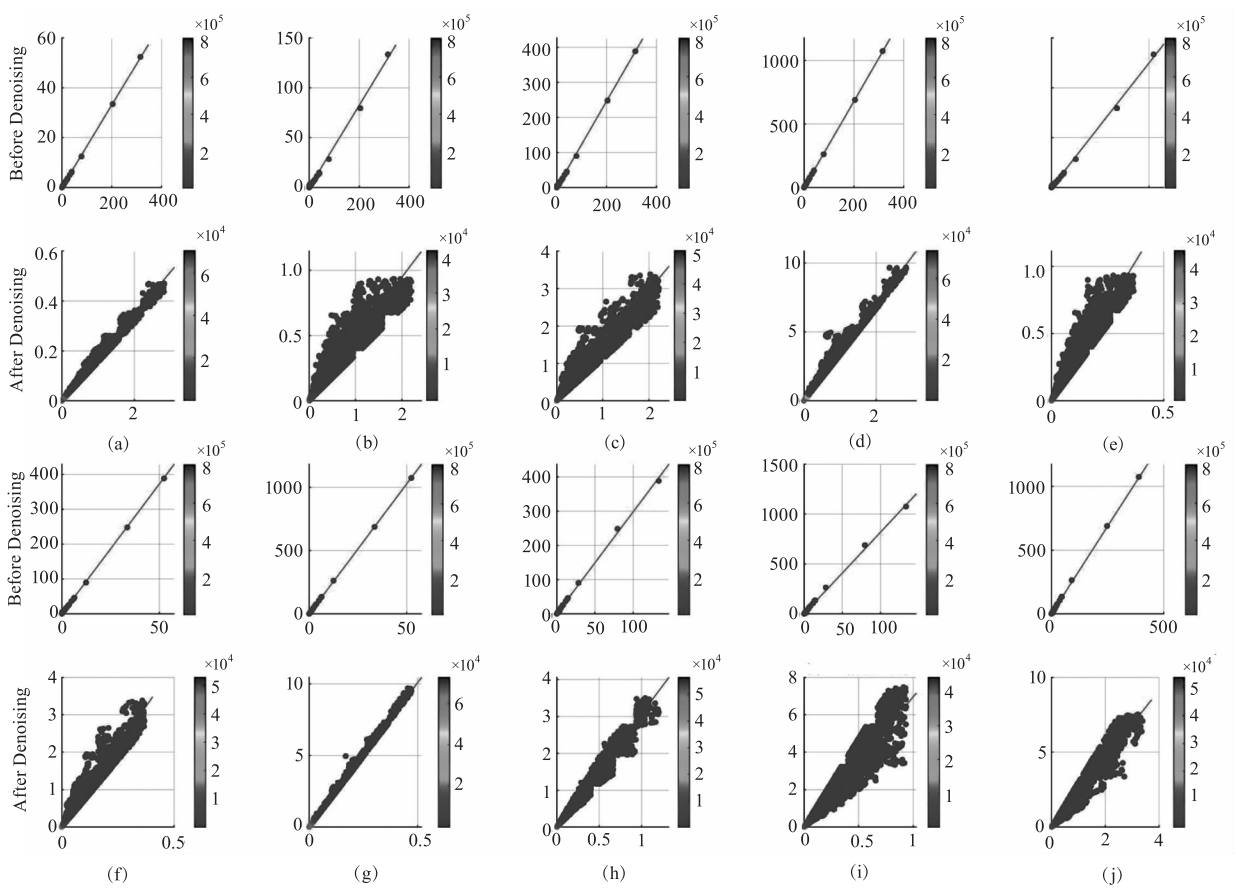

图 3　邻域 10 个点的特征密度分布

Fig. 3 Characteristic density distribution of 10 points in the neighborhood

图 3 的特征空间所示,去噪前后特征的集聚性对比明显,去噪之前,受到众多噪声的影响,使得密度集聚度散乱,且整体的最小二乘解受噪声点的影响较大。结合最小二乘解的密度空间聚类为去噪之后的结果,尽管有一定的散乱特性,但其缩小了约 100 倍的密度聚集体中包含了原有的大部分特征信息,即实现了数据的特征聚类,并消除了大部分随机误差影响,尤其是在包含能量的投影面上,其拟合度精度最高。然而,这些特征空间密度聚类后的交集包含的就是符合所有特征空间判定的有效点云,对于某些特有属性的点来说,该结果的判断具有一定的不确定性,可以通过调节层次权重的方式或者增加特征维度来进行判断。10 个近邻点的密度特征空间能够反映出绝大部分噪声点,再结合密度阈值,即可获得到有效点云。

如图 4 所示,近邻点为 40 时,相较于图 3 的密度分布,图 4 的特征空间压缩了近 80 倍,其噪声点离散性增强,方差增强,从噪声的剔除上看,效果优

于 10 个近邻点时的效果。虽然 40 个近邻点在特征空间中突出了噪声点,增加了离散度,但其特征空间范围也被快速增大了,这有可能将有效地面点也剔除了。

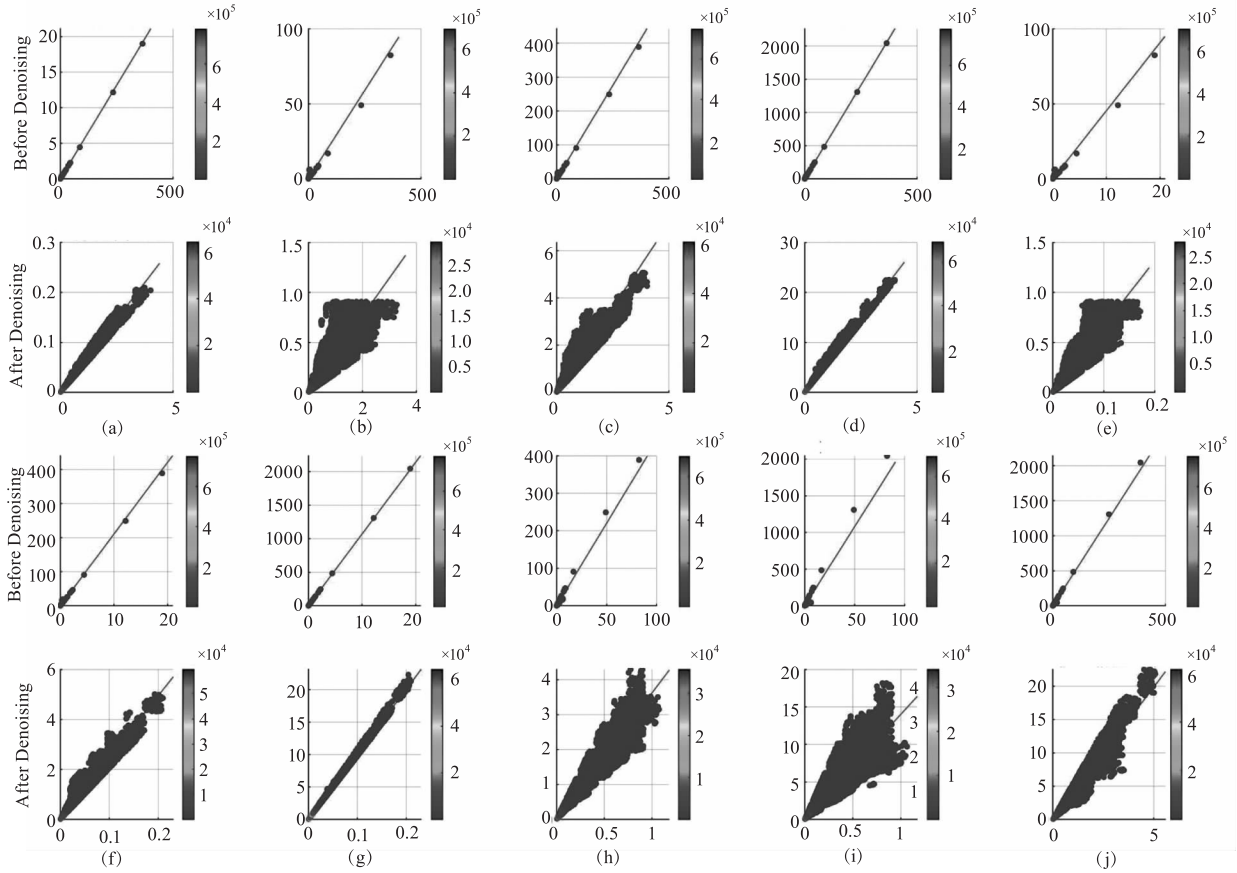

图 4 邻域 40 个点的特征密度分布

Fig. 4 Characteristic density distribution of 40 points in the neighborhood

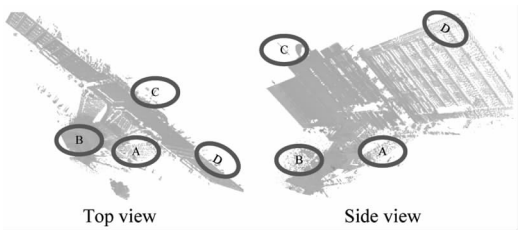

图 5 提取效果

Fig. 5 Extractive results

本文算法实验结果如图 5 所示,选择 A/B/C/D 四处被认定为噪声点云的区域,如图可知,A 区域为阴影遮挡的稀疏点云区域,由于阴影的影响,其实物属性无法体现,被作为噪声剔除也属正常;B 区域为空中离群点,该算法能准确的找出并剔除;C 区域为避雷针,由于其细而长的特性,在密度空间中很难被表现出来,这就属于错误区分的点云,但其点云个数极少,对总体精度影响不大;D 区域透过玻璃随机产生的随机噪声点,相对于较为稀疏的主体墙体而言,也能将随机噪声与墙体分离开,但同时也有少许边缘点被错误区分,可通过调节截断阈值,提高精度。

同时为了能定性、定量分析本文算法,选用不同邻域点进行实验,得到结果如表 1 所示。带有均值及斜率的投影特征密度其密度空间的一阶偏导 C_{ij} 均有所提升,带有能量、极差和方差的投影特征密度空间,其一阶偏导 C_{ij} 随着近邻点个数的增加均有所下降。

如表 2 所示,在不同的邻域点时,其中(1)、(3)、(4)、(6)、(7)的特征空间,其提取效果较差,只能去掉 1000 ~ 3000 个随机噪声点;(2)、(5)、(8)、(9)的特征空间,随着邻域点的增加,其去噪能力也在增强;(11)为特征空间的最终去噪结果,其随着近邻点的增加,噪声点剔除个数也在增加,且总体趋势与实际理论相符。

表 1　不同近邻点的投影特征最小二乘约束条件

Tab. 1 Projective feature least-squares constraints of different neighbor points

近邻点	投影特征	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
去噪前	10	0. 17	0. 41	1. 23	3. 40	2. 50	7. 46	20. 57	2. 98	8. 18	2. 75
	20	0. 08	0. 28	1. 12	4. 64	3. 55	14. 09	58. 12	3. 91	15. 96	4. 10
	30	0. 05	0. 24	1. 10	5. 63	4. 54	21. 07	106. 97	4. 41	21. 62	5. 00
	40	0. 04	0. 21	1. 10	6. 48	5. 52	28. 07	164. 60	4. 58	25. 70	5. 79
去噪后	10	0. 17	0. 47	1. 48	3. 49	2. 77	8. 61	20. 18	3. 07	6. 96	2. 29
	20	0. 09	0. 40	1. 45	4. 83	4. 65	16. 62	55. 29	3. 47	11. 03	3. 26
	30	0. 06	0. 38	1. 43	5. 88	6. 61	24. 72	100. 38	3. 61	13. 97	3. 98
	40	0. 04	0. 37	1. 43	6. 78	8. 56	32. 63	153. 60	3. 71	16. 80	4. 63

表 2　不同近邻点在各投影面上去噪后的点个数

Tab. 2 The number of points denoised by different neighboring points on each projection plane

特征	点数			
	近邻 10 点	近邻 20 点	近邻 30 点	近邻 40 点
1	819728	819729	819725	819742
2	819443	819253	819191	818955
3	819620	819545	819617	819633
4	819764	819827	819728	819755
5	819472	819340	819082	819112
6	819671	819642	819596	819592
7	819729	819761	819740	819692
8	819515	819389	819262	819046
9	819481	819302	819239	818891
10	819664	819642	819678	819523
11	819158	819089	818914	818727

采用第一类错分误差、第二类错分误差以及总错分误差验证算法的有效性，其中总错分误差是将有效点错误分为噪声点的数量和将噪声点错误分为有效点的数量之和占总和点云的比例，公式为：

$$t = \frac{c + d}{a + b + c + d} \times 100\%$$

式中，a 为有效点数量；b 为噪声点数量；c 为将有效地面点错误分为噪声点的数量；d 为将噪声点错误分为有效地面点的数量。

由表 3 可知，选择的近邻点数不同时，其噪声的剔除能力不同，均方差和分类误差均有所变动，同时，在选择近邻点个数为 30 时，虽然其均方差较大，但其分类误差最小，总的错分率 t 为 0. 000574，满足工程所需精度。

表 3　不同邻域点个数下的提取结果及精度

Tab. 3 Extraction results and accuracy of different neighborhood points

number of neighborhood points	10	20	30	40	the original point cloud
MSE/m	0. 004088	0. 003957	0. 004101	0. 003987	0. 012569
t_1	0. 004192	0. 002859	0. 001923	0. 003171	—
t_2	0. 000635	0. 000332	0. 000235	0. 000387	—
t	0. 001073	0. 000678	0. 000574	0. 000756	—
time/s	25. 626	28. 344	32. 198	35. 875	—
points after denoise	819158	819089	818914	818727	820025

4　结　论

本文提出了一种基于最小二乘密度聚类的城市点云去噪算法，计算近邻点统计特征空间，运用最小二乘约束特征空间在各维度方向的投影密度，以此进行密度聚类、剔除噪声点云。以 VZ - 1000 地面三维激光扫描仪获取的城市点云数据，分析复杂环境下的城市点云空间结构与邻域特性，结果表明当近邻点个数为 30 时，该算法总分类误差最小。同时，实验也体现出本算法的优势：理论便于实现，且能快速、精确地去除噪声点云，具有一定的实用价值；但仍有不足之处，主要为稀疏点云的边缘、障碍物的阴影处以及低密度的线性地物等点云，这些是

极容易造成错误分类的点,因此未来需要更深入地进行研究。

参考文献:

[1] Hui Zhenyang, Cheng Penggen, Guan Yunlan, et al. Review on airborne LiDAR point cloud filtering[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2018, 55(6): 60001. (in Chinese)
惠振阳,程朋根,官云兰,等. 机载 LiDAR 点云滤波综述[J]. 激光与光电子学进展,2018,55(6):60001.

[2] Zhao Jingdong, Yang Fenghua, Guo Yingxin. Unified algorithm for scattered point cloud denoising and simplification[J]. Journal of Computer Applications, 2017, 37(10): 151 – 155. (in Chinese)
赵京东,杨凤华,郭英新. 散乱点云去噪与简化的统一算法[J]. 计算机应用,2017,37(10):151 – 155.

[3] Yuan Hua, Pang Jiankong, Mo Jianwen. Denoising algorithm for bilateral filtered point cloud based on noise classification[J]. Journal of Computer Applications, 2015, 35(8): 199 – 204. (in Chinese)
袁华,庞建铿,莫建文. 基于噪声分类的双边滤波点云去噪算法[J]. 计算机应用,2015,35(8):199 – 204.

[4] Deng Wenjun, Ye Jingyang, Zhang Tie. Acquisition and denoising algorithm of laser point cloud oriented to robot polishing[J]. Acta Optica Sinica, 2016, 36(8): 0814002. (in Chinese)
邓文君,叶景杨,张铁. 面向机器人磨抛的激光点云获取及去噪算法[J]. 光学学报,2016,36(8):0814002.

[5] Li Pengfei, Wu Haie, Jing Junfeng, et al. Noise classification denoising algorithm for point cloud model[J]. Computer Engineering and Applications, 2016, 52(20): 188 – 192. (in Chinese)
李鹏飞,吴海娥,景军锋,等. 点云模型的噪声分类去噪算法[J]. 计算机工程与应用,2016,52(20):188 – 192.

[6] Lin Hongbin, Fu Demin, Wang Yinteng. Feature preserving denoising of scattered point cloud based on parametric adaptive and anisotropic gaussian kernel[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2017, 23(12): 26 – 35. (in Chinese)
林洪彬,付德敏,王银腾. 基于参数自适应各向异性高斯核的散乱点云保特征去噪[J]. 计算机集成制造系统,2017,23(12):26 – 35.

[7] Xu Long, Huang Xiang, Li Gen. Point clouds denoise algorithm based on fuzzy C-means and mean filter[J]. Machine Building Automation, 2016, 45(4): 11 – 13, 29. (in Chinese)
许龙,黄翔,李根. 一种基于模糊 C 均值和均值滤波的点云去噪算法[J]. 机械制造与自动化,2016,45(4):11 – 13,29.

[8] Lv Ya, Wan Chenghui. A denoising method by layering for terrain point cloud from 3D laser scanner[J]. Journal of Geomatics Science and Technology, 2014, 31(5): 501 – 504. (in Chinese)
吕娅,万程辉. 三维激光扫描地形点云的分层去噪方法[J]. 测绘科学技术学报,2014,31(5):501 – 504.

[9] Chen K, Zhang D, Zhang Y S. Point cloud data processing method of cavity 3D laser scanner[J]. Acta Optica Sinica, 2013, 33(8): 0812003. (in Chinese)
陈凯,张达,张元生. 采空区三维激光扫描点云数据处理方法[J]. 光学学报,2013,33(8):0812003.

[10] Hui Zhenyang, Hu Youjian. Review on morphological filtering algorithms based on LiDAR digital elevation model construction[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2016, 53(8): 080001. (in Chinese)
惠振阳,胡友健. 基于 LiDAR 数字高程模型构建的数学形态学滤波方法综述[J]. 激光与光电子学进展,2016,53(8):080001.

[11] Chen Linzhe, Feng Baohong. Denoising algorithm for bilateral filtered point cloud based on variance threshold[C]//Computer Science and Electronic Technology International Society: Clausius Scientific Press, 2018: 295 – 300.

[12] Taubin G. A signal processing approach to fair surface design[C]//Proceedings of the 22th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. New York, N. Y., USA: ACM, 1995: 351 – 358.

[13] Jones T R, Durand F, Desbrun M. Non-iterative, feature preserving mesh smoothing[J]. ACM Transactions on Graphics, 2003, 22(3): 943 – 949.

[14] Fleishman S, Drori I, Cohen-Or D. Bilateral mesh denoising[J]. ACM Transactions on Graphics, 2003, 22(3): 950 – 953.

[15] Niu Xiaojing, Wang Meili, He Dongjian. A point cloud denoising and smoothing method based on fusion of clustering and filtering[J]. Computer Applications and Software, 2016, 33(10): 155 – 159. (in Chinese)
牛晓静,王美丽,何东健. 一种聚类与滤波融合的点云去噪平滑方法[J]. 计算机应用与软件,2016,33(10):155 – 159.

[16] Su Benyao, Ma Jinyu, Peng Yusheng, et al. Algorithm for RGBD point cloud denoising and simplification based on K-means clustering[J]. Journal of System Simulation, 2016, 28(10): 45 – 50, 57. (in Chinese)
苏本跃,马金宇,彭玉升,等. 基于 K-means 聚类的 RGBD 点云去噪和精简算法[J]. 系统仿真学报,2016,28(10):45 – 50,57.

[17] Zhang Qiaoying, Chen Hao, Zhu Shuang. Application of density clustering algorithm in denoising continuous distribution point cloud[J]. Geospatial Information, 2011, 9(6): 10 – 11, 113 – 116. (in Chinese)
张巧英,陈浩,朱爽. 密度聚类算法在连续分布点云去噪中的应用[J]. 地理空间信息,2011,9(6):10 – 11,113 – 116.

[18] Tian Qinghua, Bai Ruilin, Li Du. Point cloud segmentation of scattered workpieces based on improved euclidean clustering[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2017, 54(12): 121503. (in Chinese)
田青华,白瑞林,李杜. 基于改进欧氏聚类的散乱工件点云分割[J]. 激光与光电子学进展, 2017, 54(12):121503.

[19] Feng Donghuan, Shi Bo, Lu Xiushan, et al. A Multi-beam point cloud denoising algorithm considering underwater topographic features[J]. Journal of Geomatics Science and Technology, 2017, 34(4): 37 – 42. (in Chinese)
冯东恒,石波,卢秀山,等. 一种顾及水下地形特点的多波束点云去噪算法[J]. 测绘科学技术学报,2017,34(4):37 – 42.

[20] Lin Wangyu, Zhou Siyao, Yuan Zhengpeng. Research on the method for denoising of point cloud based on least trimmed squares[J]. Metrology & Measurement Technique, 2016, 43(12): 64 – 66. (in Chinese)
林万誉,周思跃,袁政鹏. 基于最小截取二乘法的点云数据去噪方法研究[J]. 计量与测试技术,2016,43(12):64 – 66.

[21] Zhao Kai, Xu Youchun, Li Yongle, et al. Large-scale scattered point-cloud denoising based on VG-DBSCAN algorithm[J]. Acta Optica Sinica, 2018, 38(10): 1028001. (in Chinese)
赵凯,徐友春,李永乐,等. 基于 VG-DBSCAN 算法的大场景散乱点云去噪[J]. 光学学报, 2018, 38(10):1028001.

[22] Li Minglei, Li Guangyun, Zong Wenpeng. Accurate and fast denoising method of laser-scanned point clouds[J]. Bulletin of Surveying and Mapping, 2015, (12): 37 – 39. (in Chinese)
李明磊,李广云,宗文鹏. 激光扫描点云准确快速去噪方法[J]. 测绘通报,2015,(12):37 – 39.

[23] Li Renzhong, Yang Man, Ran Yuan, et al. Point cloud denoising and simplification algorithm based on method library[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2018, 55(1): 011008. (in Chinese)
李仁忠,杨曼,冉媛,等. 基于方法库的点云去噪与精简算法[J]. 激光与光电子学进展, 2018, 55(1):011008.

[24] Xie Jian, Long Sichun, Li Li, et al. An aggregate function method for weighted total least squares with inequality constraints[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2018, 43(10): 1526 – 1530. (in Chinese)
谢建,龙四春,李黎,等. 不等式约束加权整体最小二乘的凝聚函数法[J]. 武汉大学学报:信息科学版,2018,43(10):1526 – 1530.