

文章编号:1001-5078(2023)06-0803-09

· 综述与评论 ·

## 相位恢复算法研究进展

张宇<sup>1,2</sup>, 张洪文<sup>1</sup>, 远国勤<sup>1</sup>

(1. 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130000; 2. 中国科学院大学, 北京 100000)

**摘要:** 相位恢复技术是波前重构技术的一个重要分支, 重构的结果只取决于测量平面光强的分布, 相比于其他的波前重构方法, 相位恢复技术具有不需要在光路中添加额外硬件、光路简单、对光路环境的要求低、抗干扰能力强等优点, 在光束整形、激光光束净化和干涉成像等领域有着非常广阔的应用前景。相位恢复的精度及速度是评价相位恢复技术的主要准则, 此领域目前文献比较繁杂, 本文梳理了相位恢复算法的发展脉络, 围绕相位恢复算法的收敛精度与收敛速度等核心问题, 系统的介绍了迭代及光强相位恢复算法的相关研究进展, 并且对相位恢复算法的发展前景进行了展望。

**关键词:** 计算成像; 相位恢复; 迭代算法; 光场传递

**中图分类号:** TN29; TP391 **文献标识码:** A **DOI:** 10.3969/j.issn.1001-5078.2023.06.001

## Research progress in phase recovery algorithms

ZHANG Yu<sup>1,2</sup>, ZHANG Hong-wen<sup>1</sup>, YUAN Guo-qin<sup>1</sup>

(1. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130000, China;  
2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100000, China)

**Abstract:** Phase recovery technology is an important branch of wavefront reconstruction technology where the result of reconstruction only depends on the distribution of light intensity in the measurement plane. Compared with other wavefront reconstruction methods, phase recovery technology has the advantages of no additional hardware in the optical path, simple optical path, low requirements on the optical path environment and high interference immunity and has very broad application prospect in the fields of beam shaping, laser beam purification and interference imaging. The accuracy and speed of phase recovery is the main criteria for evaluating phase recovery technology. At present, the literature in this field is relatively complicated. In this paper, the development of the phase recovery algorithm is summarized. The core issues of the convergence accuracy and convergence speed of the phase recovery algorithm are introduced, a systematic introduction of the relevant research progress of iterative and light intensity phase recovery algorithms are presented, and an outlook on the development prospects of phase recovery algorithms is given.

**Keywords:** computational imaging; phase recovery; iterative algorithm; light field transfer

### 1 引言

20世纪60年代, 激光的问世使古老的光学学科又重新焕发了生机, 基于几何光学的传统光电成像技术具有系统简单、可视性强等优点, 其成像理论

及加工体系逐渐完备, 但随着科学技术的进一步发展, 人们对成像质量的要求不断增高, 几何光学过于依赖光学设计, 在优化调制传递函数(MTF)的过程中不可避免地存在一些物理限制:(1)丢失了相位、

**基金项目:** 国家自然科学基金青年基金项目(No. 52105537); 国家高分重大专项项目(No. GF2X 0403260308)资助。

**作者简介:** 张宇, 男, 硕士研究生, 主要从事基于计算光学的成像质量提升方面的研究。E-mail: zhangyuqx@163.com

**通讯作者:** 张洪文, 男, 博士, 研究员, 主要从事航空遥感成像方面的研究。E-mail: zhang\_hong\_wen@sina.com

**收稿日期:** 2022-08-22; **修订日期:** 2022-09-26

光谱、偏振等大量的光场信息；(2) 受口径、成像分辨率及成像距离受限；(3) 易受大气湍流等环境因素的影响，难以达到极限分辨率；(4) 受限于加工、装调等工艺条件限制，不可避免地带来像差，影响成像质量。

为了解决以上问题，越来越多的光学成像系统引入了物理光学，搭配新型光电器件和相应的算法，使系统的成像质量超越几何光学的极限，这便是计算成像<sup>[1-3]</sup>。作为新一代光电成像技术，计算成像是光电成像技术步入信息时代的必然产物<sup>[4]</sup>。相位恢复作为经典的计算成像技术之一，不需要在光学系统中添加额外的硬件，通过探测器接收到的光强数据即可计算系统像差并进行相位补偿，从而提高系统的成像质量，目前已广泛应用于 X 射线结晶学、电子显微镜、波前探测、天文学、全息技术等领域<sup>[5-8]</sup>，在激光的光束净化、相干合成等领域可以代替原有的波前传感方法，对光路进行简化，具有广阔的应用前景。

多年来众多学者致力于相位恢复算法的优化与改进，取得了一系列成果，极大的推进了该领域的发展。本文围绕相位恢复算法收敛精度与收敛速度等核心问题，详细介绍了相位迭代算法和光强传输方程算法的发展脉络，比较了两种算法的优缺点及应用场景，简要介绍了近年来出现的几种新型相位恢复算法，在本文最后一部分对目前相位恢复算法的发展做了总结，并给出了未来的发展趋势。

## 2 相位恢复算法

常用的相位测量技术有干涉型和衍射型 2 种，其中衍射型相位测量技术又可分为波前测量技术与相位恢复技术两种，如图 1 所示。相位恢复技术通过较容易获取的平面光强信息恢复出难以直接测量的相位信息，相比于干涉型相位测量技术，相位恢复技术不需要严格的相干光，对光源、光路以及环境要求较低，抗干扰能力强；相比于波前测量技术，相位恢复技术不需要在光路中引入夏克-哈特曼等传感器，不需要添加额外的硬件，光路较为简单，因此在相位测量领域有着愈发重要的地位，具有广泛的适用性<sup>[9]</sup>。

相位恢复算法在发展中形成了迭代相位恢复算法和光强传输方程算法两种主要技术路线。迭代相位恢复算法的核心为在一定的约束下，通过光在几

个光场传输面及目标域/变换域的相互迭代进行相位恢复，具有恢复精度较高等优点，但速度较慢；光强传输方程算法的核心是光场衍射传输理论，恢复速度较快，但精度较低。

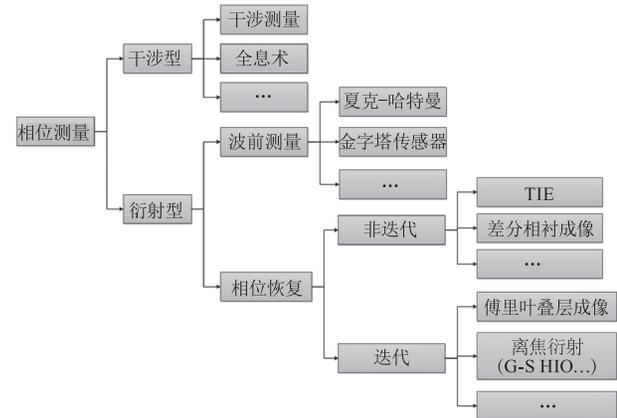


图 1 相位获取及技术脉络

Fig. 1 Phase acquisition and technology context

本节对迭代相位恢复算法及其衍生算法、光强传输方程算法的发展脉络进行重点介绍，并简要介绍了一些近年出现的新型相位恢复算法。

### 2.1 迭代相位恢复算法

#### 2.1.1 GS 算法的提出及其发展

1972 年，为了解决电子显微镜的成像问题，Gerchberg 和 Saxton 等人提出一种通过迭代恢复物面相位的方法<sup>[10]</sup>，即 GS 迭代法，后续大多数关于迭代法相位恢复的研究都是基于此框架。GS 迭代法原理为：在一定的约束条件下，基于光强信息在物域与傅里叶域的相互迭代，最后求得所需的相位信息，如图 2 所示，具体过程如图 3 所示。

① 设迭代次数  $k = 0$ ，任意设定输入面初始相位  $\phi_k$ ，与输入面振幅  $A$  组合成输入面光场复振幅  $u_k(x) = A(x)e^{i\phi_k(x)}$ ；

② 对①中输入面光场进行傅里叶变化得到傅里叶域的光场分布  $U_k(f_x) = |U_k(f_x)|e^{i\phi_k(f_x)}$ ，其中  $\phi_k(f_x)$  为傅里叶域相位，此时判断是否满足要求，满足要求迭代终止，否则，用测得的傅里叶域振幅值  $|U'_k(f_x)| = \sqrt{I_k}$  代替傅里叶变换的幅值，得到新的傅里叶域光场  $U'_k(f_x) = |U'_k(f_x)|e^{i\phi_k(f_x)}$ ；

③ 对  $U'_k(f_x)$  进行傅里叶逆变换得到物域复振幅  $u'_k(x) = |u'_k(x)|e^{i\theta_k(x)}$ ，其中  $\theta_k(x)$  是新的物域相位，用已知的物域复振幅  $|u(x)|$  代替傅里叶逆

变换的复振幅,得到新的物域光场  $u_k(x) = |u(x)|e^{i\theta_k(x)}$ ,令  $k = k + 1$ ,然后重复步骤②。

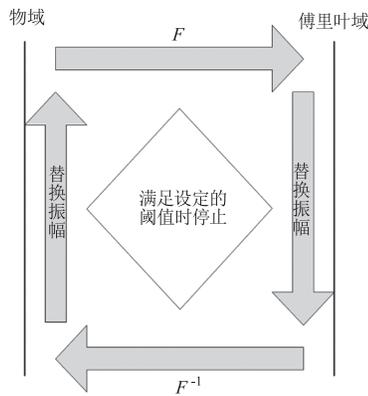


图2 GS算法示意图

Fig. 2 Schematic diagram of GS algorithm

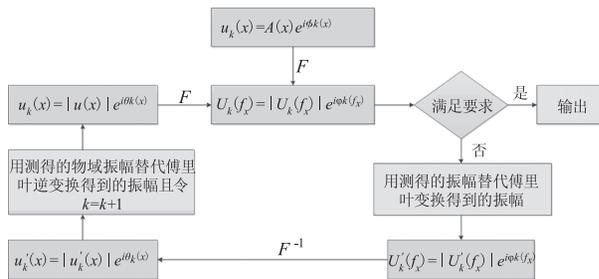


图3 GS算法具体流程图

Fig. 3 GS algorithm specific flow chart

GS算法可以很好地恢复出瞳相位,且结构简单,抗扰动能力强,鲁棒性较高,但是迭代次数过多,收敛速度慢,迭代过程可能停滞,难以找到全局最优解。

GS算法一经提出,得到许多关注,国内外众多学者对此进行研究,提出了一系列的改进措施。1973年, Misell 给出了一种利用两个的离焦面的光强分布来复位出瞳面的相位和振幅的方法<sup>[11]</sup>,该方法可以在不同的离焦面之间使用,突破了仅在物域和傅里叶域之间使用的限制,极大地拓宽了GS迭代法的适用范围,成为后来研究的基本方向之一。

1980年,我国科学家顾本源和杨国桢提出了振幅-相位恢复问题更普遍的理论 and 算法<sup>[12]</sup>,即杨-顾算法,并且给出了严格的数学推导,该算法基于一般光学变换理论公式,可以应用于任意线性变换系统,解决了GS算法收敛过程中容易出现停滞的问题,同时突破了GS方法只适用于傅里叶相位问题。

2006年 Brady 和 Fienup 开发了一种基于非线性优化的相位恢复算法<sup>[13]</sup>,与 Misell 离焦面算法不

同,该算法通过相干的点光源对瞳孔进行照明,将检索到的相位与测量强度得到的振幅信息相结合,形成复场,然后反向传播到瞳孔平面,由此得到瞳孔平面上的振幅和相位的估计值。非线性优化法可以显式最小化目标函数,对一些不理想的效果进行补偿,由于不需要瞳孔的先验知识,在一些瞳孔信息不确定或者振幅分布不均匀的情况下,该算法可以很好地复位出瞳信息。同时作者探索了用于改进相位估计的纯相位检索算法,将上述算法的结果作为纯相位算法的输入,使用假设的瞳孔振幅,直接估计波前泽尼克系数,具体过程如图4所示,但是这个过程要求瞳孔中的振幅分布是均匀的,相位是平滑的,且可以被少量泽尼克多项式描述。

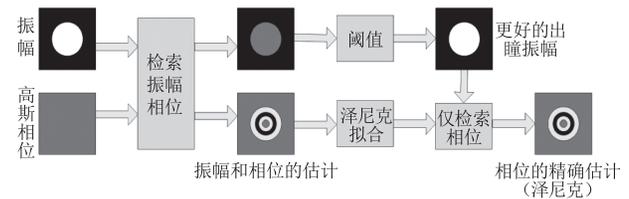


图4 纯相位检索方式示意图<sup>[13]</sup>

Fig. 4 Schematic diagram of pure phase retrieval method<sup>[13]</sup>

为了解决算法收敛速度慢和迭代停滞的问题,权值的思想在21世纪初被一些学者关注并引入到GS算法中。

2000年,复旦大学物理系的顾翔等人提出相位加权,即用中间计算结果及一个加权因子  $\lambda$  来切换初始条件的新算法<sup>[14]</sup>。该算法在GS算法的流程上添加了一个步骤,当计算将要进入停滞状态时,随机保存期间两次迭代第一步的计算结果,提取出其相位的部分,记为  $\phi_1(x, y)$  和  $\phi_2(x, y)$ ,然后构建出新的相位  $\phi'(x, y) = \lambda\phi_1(x, y) + (1 - \lambda)\phi_2(x, y)$ ,继续进行迭代,但是过程要人为控制。

2010年,黄利新等人提出了加速角谱迭代的方法<sup>[15]</sup>,利用三个面的光强信息来恢复入射光场的相位分布,通过引入梯度的思想,在保证算法在向最优解方向迭代的情况下,加大每次迭代的步长,从而实现快速收敛。具体方法为:每次迭代时,将本次的迭代值  $\phi_k$  与上次的迭代值  $\phi_{k-1}$  的差  $\phi'$  作为梯度的方向,将  $\alpha_k\phi'_k$  作为迭代附加值。该算法可以在二维的情况下快速准确的恢复出光场的相位分布,具有良好的收敛性且收敛速度极快。2013年,彭金锰等人针对GS方法收敛速度慢及收敛性差的问题提出

了振幅加权的思想<sup>[16]</sup>,传统的 GS 算法是用测得的输入面振幅来代替逆变换得到的输入面光场振幅,在该算法中使用测得的振幅与迭代得到的振幅的组合作为下次迭代的振幅初始值,输出面同理。即:

$$\begin{cases} A^p(x_0, y_0) = \beta A(x_0, y_0) + (1 - \beta) \bar{A}^p(x_0, y_0) \\ B^p(x_1, y_1) = \alpha B(x_1, y_1) + (1 - \alpha) \bar{B}^p(x_1, y_1) \end{cases}$$

其中,上标  $p$  为迭代次数; $A(x_0, y_0)$ 、 $B(x_1, y_1)$  分别为近场和成像面光场函数的振幅,“-”为中间值; $\alpha$  和  $\beta$  为加权系数。仿真表明该算法在加权系数取合适值时,一定程度上提高了算法收敛的速度和精度,而且避免了算法进入局部极小值。

GS 算法的提出,极大地促进了相位恢复技术的发展,可以有效地恢复出相位分布,但也存在着适用性差、迭代速度较慢、收敛性较差等一些弊端。经过前期相关研究人员的发展,GS 算法的应用范围和普适性得到极大的提升,之后研究重点集中在对 GS 算法性能的提高,即如何提高算法的收敛精度与速度,避免算法陷入停滞,顺利找到全局最优解。经过不断完善,取得了一系列成果,下小节将对其中较为著名的 HIO 算法及其衍生算法做一个简要介绍。

### 2.1.2 基于 GS 算法的 HIO 算法及其发展

1978 年, Fienup 在 GS 算法的基础上进行对其收敛性进行一些改善,提出了误差减少(ER)算法<sup>[17]</sup>,ER 算法原理上基本与 GS 算法相同,只是通过物的自相关函数获得物的直径,当  $u'_k(x)$  超过物直径范围时,令  $u'_k(x) = 0$ 。1982 年, Fienup 证明了在单次强度测量的相位恢复时,ER 算法等效于具有双倍步长的最速下降法,且在误差单调减少时收敛,但收敛速度非常慢。为了解决 ER 算法收敛

速度慢的问题, Fienup 提出了混合输入输出法(HIO)<sup>[18]</sup>,HIO 法还是基于 GS 法,只是改变了 GS 算法的最后一步。

$$u_k = \begin{cases} u'_{k-1}, & (x, y) \in \gamma \\ u_{k-1} - \beta u'_{k-1}, & (x, y) \notin \gamma \end{cases}$$

其中,  $\beta \in (0, 1)$ ,  $\gamma$  是空间上的约束。HIO 算法是对 ER 算法的修正,当  $\beta = 1$  是 HIO 方法又退化成 ER 算法。ER 算法只是从被迫满足空间约束的图像中导出相位,而 HIO 算法通过主动导出相位,然后与傅里叶振幅数据组合,推动图像满足图像域空间约束,因此 HIO 算法是打破迭代停滞的有效手段。

当光学系统较为复杂时,光在各个面之间传播将进行多次菲涅尔变换,且梯度搜索法需进行求导运算,整个过程计算量较大。基于以上需求及之前的工作,1992 年 Fienup 推导了梯度搜索算法和迭代相位恢复算法的推广式,给出了关于多项式系数和逐点相位描述的误差梯度解析式<sup>[19]</sup>,光在各衍射平面之间传播时,整个梯度只与光传播中变换的次数有关,与系数和相位点数量无关,大大加快了计算速度。此外还给出了瞳孔振幅的重建方法和广义迭代算法的收敛性证明<sup>[20]</sup>,这些算法的改进可以使用点扩散函数更精确的描述复杂光学系统<sup>[21-22]</sup>。

但是当连续迭代时,HIO 算法的值会随着迭代次数的增加有所振荡,这是因为输出的值和下次输入的值是不连续的,基于此 2012 年 Fienup 又提出了 HIO 算法的改进形式连续混合输入-输出算法(CHIO)<sup>[23]</sup>,该算法在  $u_k(x, y)$  的取值上做了一些优化,如图 5 所示。

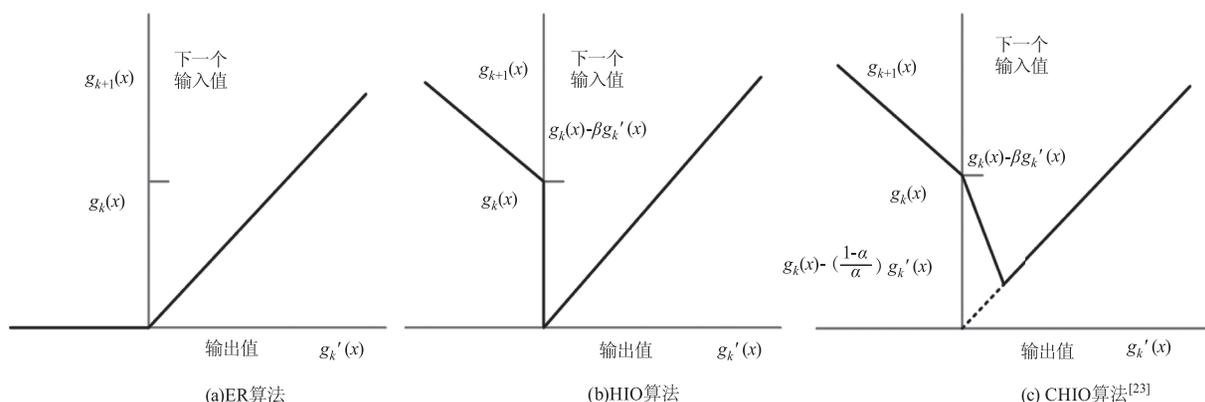


图 5 算法的下次输入值

Fig. 5 The next input value of the algorithm

1997年, Millane 和 Stroud 研究高分子在 X 射线结晶学中图像重建时, 针对傅里叶强度欠采样问题, 提出了基于 HIO 算法的广义混合输入输出算法 (GHIO)<sup>[24]</sup>。该算法在图像中引入了对称约束, 有助于弥补缺少的傅里叶振幅数据, 通过将 HIO 算法的多次迭代与 ER 算法的几次迭代交替使用, 可以解决图像重建时的收敛停滞问题, 改善其收敛性能。GHIO 对光场幅值的要求较为宽松, 在实际应用中可以有效解决欠采样, 输入面出瞳函数缺失等问题。

此外, 在 HIO 算法应用过程中, 如果输入信号不是空间有限, 在 Nyquist 采样时将会出现混叠, 无法成功检索目标域和傅里叶域的相位。为了解决此问题, 2015 年柏林大学的郭长良等人提出了两种基于强度测量的相位恢复算法: 空间相位扰动 GS 算法 (SPP/GS) 和组合 GS 混合输入-输出算法 (GS/HIO)<sup>[25]</sup>。两种算法对相位的恢复情况都要优于单独使用 GS 算法或者 HIO 算法, 可以有效地避免相位恢复过程中出现的停滞情况, 实现快速收敛, 且能收敛到全局极小值, 极大的提高了在空间和傅里叶域中成功检索相位可能性。作者对两种算法进行了比较, 结果表明 GS/HIO 算法循环优化的收敛速度要比 SPP/GS 算法快很多, 但在有噪声的情况下 SPP/GS 的性能要优于 GS/HIO 算法。以上算法汇总如表 1 所示。

表 1 基于 GS 算法的一些发展

Tab. 1 Some developments based on GS algorithms

算法	解决的问题
ER 算法	改善了 GS 算法的收敛性
HIO 算法	加快了收敛速度, 一定程度上打破了收敛过程中的停滞问题
CHIO 算法	解决了迭代过程中振荡的问题
GHIO 算法	可以有效解决实际应用中欠采样及光瞳数据缺失等问题
SPP/GS 和 GS/HIO 算法	解决了 Nyquist 采样时出现混叠的问题, 提高了成功检索到相位的可能性

## 2.2 基于光强传输方程的相位恢复算法

基于强度传输方程 (Transport of Intensity Equation) 的相位恢复方法, 简称 TIE, 由 Teague 于 1983 年提出, TIE 方程是一种确定性求解相位的方法, 推导了相位和辐照度的传播方程, 将物面波的强度和相位信息与传播方向的变化率联立, 通过求解一二阶椭圆偏微分方程来获得波前相位<sup>[26]</sup>。即:

$$\nabla \cdot [I \nabla P] = -\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\partial I}{\partial z}$$

其中,  $I$  为光强;  $z$  为光传播方向;  $\nabla$  为微分算子;  $P$  为相位, 光场复振幅  $u = \sqrt{I}e^{iP}$ 。Teague 使用了格林函数法来求解泊松方程, 但该方法求解较复杂且需要额外的边界条件, 不适合实际应用, 在此基础上研究学者又提出傅里叶方法<sup>[27]</sup>、泽尼克多项式法<sup>[28]</sup>、多重网格法<sup>[29-30]</sup>等多种算法用来求解 TIE。

1980 年, Roddier F 和 Roddier C 提出了一种新的波前传感方法<sup>[31-32]</sup>, 该方法同样基于泊松方程的求解进行重建波前, 将自适应光学控制回路的迭代算法进一步细化, 极大的拓宽了原始方法的动态范围, 可以在较大像差存在时检索较小的像差。

1988 年, Ichikawa 和 Takeda 使用傅里叶变换求解在高空间载频的边界条件下的 TIE, 首次通过实验验证了从测量的辐照度中可以唯一的确定相位分布, 并进行了定量测量, 相位分布的一阶导数与预测值符合<sup>[33]</sup>。同一时期 Roddier F 又用此方法对大气扰动引起的镜面波相差进行了补偿与校正<sup>[34]</sup>。

1995 年, Gureyev 等人通过严格的数学推导, 证明了 TIE 解的唯一性<sup>[35]</sup>。同年 Gureyev 和 Nugent 等人通过将 TIE 分解为一系列泽尼克多项式, 得到显式矩阵公式, 将相位的泽尼克系数表示为孔径内波前曲率的泽尼克系数和波前边界斜率的傅里叶系数的函数。该工作为快速准确的相位检索算法奠定了基础<sup>[36]</sup>。但其实现基于两个重要的假设: 第一, 需要重建相位的光束必须具有圆形横截面; 第二, 该截面内必须均匀照明。Roddier 提出的初始波前曲率技术也是基于第二个假设, 但是实际应用中, 许多情况下截面的强度分布并不均匀。

基于以上问题, Gureyev 和 Nugent 于 1996 年提出一种在不均匀照明情况下利用 TIE 进行相位恢复的新方法<sup>[37]</sup>。该方法可以在不需要任何单独的边界条件下处理非均匀照明的情况, 还消除了波前曲率传感器技术必须区分边界相位数据和孔径内强度导数的问题。此外, 建立了相位恢复矩阵, 且证明了该矩阵为可逆矩阵, 并进行了实验验证。上述研究奠定了 TIE 算法的数学基础, 为之后 TIE 算法的发展提供了动力。同年, Gureyev 和 Nugent 基于上述研究开创性的将 TIE 应用于 X 射线成像<sup>[38]</sup>, 将傍轴近似下的强度分布传播与波前相位联系起来, 实现

了非相干成像,打破了相干成像对时间和空间一致性的要求。后来相关技术又被许多学者应用于中子射线成像<sup>[39]</sup>、透射电子显微镜<sup>[40-41]</sup>等领域,这些领域都存在难以获得高相干性的光源的问题。

2007年,北京理工大学王潇等人提出一种基于圆形孔径的 TIE 相位恢复的改进方法<sup>[42]</sup>,通过扩大计算区域、改变边界条件来获得 TIE 的近似表达式,然后用多重网格方法进行求解恢复相位。通过使用本方法,不需要考虑待测相位的径向斜率值,简化了相位恢复的过程,但结果需要修正。

针对王潇的工作,为了使结果更加精确,2009年北京航空航天大学薛斌党等人提出一种基于完全多重网格法求解 TIE 的相位恢复方法<sup>[43]</sup>,完全多重网格法是由嵌套迭代技术与一般多重网格法结合而成,由最粗的网格逐层延拓,只在最粗层用随机值或者特定值作为迭代初始值,之后每层都用上一层的所求值作为迭代初始值,弱化了初始值的影响,从而获得更好的收敛性,可以恢复复杂的相位分布。

2010年,新加坡国立大学 Shan Shan Kou 等人将微分干涉对比度(DIC)与 TIE 结合起来,提出了 TI-DIC 技术<sup>[44]</sup>,该技术几乎可以实时检索定量相位信息,实时进行可视化和重建。2011年,安徽大学的程鸿等人研究了基于 TIE 的相位检索技术<sup>[45]</sup>,该技术包含两种方法:基于傅里叶的方法和基于整体变分的方法,通过测量焦平面和前后离焦面的光强来求解相位。作者基于该算法设计了一个实用的相位检索系统,该系统有较快的处理速度,在恢复相位的同时能保持良好的边缘,且用户可自由选择相关的图像模式。

### 2.3 相位恢复算法近年来的发展

GS 迭代法随着迭代次数的增加,恢复出的相位更加精确,但同时不可避免地造成时间上的浪费,且初始相位选取比较随意。TIE 方法计算速度快,只要求解一个二维泊松方程,但是精度不理想。2011年,郭俊虎提出 GS-TIE 角谱迭代混合算法,二者相结合既能避免 GS 迭代法初始值的任意性,又能提高 TIE 方法的精度,同时保证了计算速度<sup>[46]</sup>。先将两个面上测得的光强  $I_1$  和  $I_2$  带入 TIE 方程求出初始相位,然后将求得的初始相位代入 GS 算法中配合  $I_1$ 、 $I_2$  进行迭代,当迭代结果满足

事先预设的条件(迭代次数或者阈值)时,输出此结果,即恢复出的相位信息。具体流程如图 6 所示。

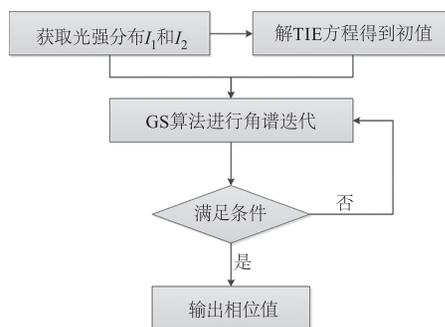


图 6 GS-TIE 混合迭代算法流程图

Fig. 6 GS-TIE hybrid iterative algorithm flow chart

2013年,梁丽等人将傅里叶变换 TIE 算法引入加速角谱迭代算法中,提出了基于 TIE 的加速角谱迭代算法(AAS-TIE)<sup>[47]</sup>,大大提高了相位恢复的精度和收敛速度。该算法测量三个垂轴面的光强信息,通过 TIE 在三个面上的传播求解出迭代初始值,然后再用三个面的加速角谱迭代扩充近场衍射的相位信息,仿真证明此算法在二维图像的恢复过程中相比于 GS-TIE 算法收敛的速度更快精度更高。

2016年,上海光机所郭怡明等人通过仿真对比了 TIE 算法和 GS-TIE 在不同离焦距离下的相位恢复效果,并进行了实验验证<sup>[48]</sup>。结果表明 TIE 算法只在较小离焦距离下具有较好的相位恢复效果,而 GS-TIE 算法在较大的离焦情况下也能得到较高的相位恢复精度,且在一定程度上能提高相位恢复的分辨率。

此外,2004年 Rodenburg 与 Faulkner 基于 GS 和 HIO 的迭代思想引入了叠层成像,提出了交叠衍射迭代成像算法(PIE)<sup>[49-51]</sup>,该算法通过改变照明光和待测物体的位置关系,采集一系列相互交叠的衍射图样,然后使用迭代法求出被覆盖区域的物体复振幅分布,可以在入射光相对于待测物体横向移动的情况下进行相位恢复。仿真结果表明,通过使用重叠的光圈可以消除相位检索中的模糊性,使得该算法具有较高的精度,且具备大面积目标函数的检索能力,极大地改善了传统算法的收敛性。鉴于其优异的性能,PIE 算法在之后得到快速的发展,目前该算法几乎已应用于相位恢复算法的所有领域。2013年,ZHENG G 等人提出了一种傅里叶显微术的成像方法,即傅里叶叠层成像(FMP)<sup>[52]</sup>。FMP 基

于频域,为空域叠层成像的对偶形式,通过在傅立叶空间中迭代将多个可变照明、低分辨率强度的图像拼接在一起,以产生宽视场、高分辨率的复杂样本图像。此方法不再使用固定的光束在空域对待测物体进行扫描,而是使用光束阵列从不同的方向进行照射,不同的照射角度实现了频域的重叠。由于一个基于空域一个基于频域,两者具有对偶特性,所以PIE算法和FMP算法可以互相借鉴交互,因此FMP算法最近几年发展较为迅速。

### 3 结论

纵观相位恢复算法的发展,其本质都是依靠容易获得的光强信息来获得不易测得的相位信息,众多学者致力于优化算法的收敛速度以及收敛精度,避免算法陷入局部最优解,进入停滞状态,一系列的研究进展极大的推动了相位恢复算法的发展,目前相位恢复算法被广泛的应用于天文学、波前探测、自由曲面面型检测等领域中提高成像质量。国外相位恢复算法的研究起步较早,但近年来国内相关研究发展迅速,并取得了极大的研究成果。

相位恢复算法的分支众多,每个分支都具有各自的优势,虽然各个算法都还存在着可优化的空间,但从发展趋势来看,多种算法互相融合将成为今后重要的发展方向之一,目前该方向已有一些相关研究,算法的融合跨度极大。此外相位恢复技术已不再局限于只恢复相位,精细重构未知目标的平面光场将成为今后的一大热点。此外实际应用对相位恢复算法的要求也逐渐提高,从一维到二维扩展、从相干到非相干延伸、从线性系统向非线性系统过渡、应用环境由简单到复杂,但始终追求的目标是相位恢复的速度和精度。

随着相位恢复算法的发展,相位恢复技术被应用于散射成像、计算全息、生物医学成像、干涉成像等更多的领域,逐渐打破干涉和衍射的壁障,前景愈加广阔,在基于波前传感器和校正器的传统自适应光学的应用领域,相位恢复技术都大有可为。

### 参考文献:

[1] Kubala K, Dowski E, Cathey W T. Reducing complexity in computational imaging systems[J]. *Optics Express*, 2003, 11(18):2102-2108.

[2] Radha, Hayder. Computational photography: methods and

applications[J]. *Journal of Electronic Imaging*, 2011, 20(4):049901-049901-5.

- [3] Joseph, Mait N, Gary, et al. Computational imaging[J]. *Advances in Optics and Photonics*, 2018, 10(2):409-483.
- [4] Shao Xiaopeng, Liu Fei, Li Wei, et al. Latest progress in computational imaging technology and application[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2020, 57(2):45. (in Chinese)  
邵晓鹏, 刘飞, 李伟, 等. 计算成像技术及应用最新进展[J]. *激光与光电子学进展*, 2020, 57(2):45.
- [5] Millane R P. Phase retrieval in crystallography and optics[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1990, 7(3):394-411.
- [6] Dean B H, Aronstein D L, Smith J S, et al. Phase retrieval algorithm for JWST flight and testbed telescope [C]// *Conference on Space Telescopes and Instrumentation. Optical, Infrared, and Millimeter*, 2006.
- [7] Mao H, Xiao W, Zhao D. Application of phase-diverse phase retrieval to wavefront sensing in non-connected complicated pupil optics [J]. *Chinese Optics Letters*, 2007, 5(7):397-399.
- [8] Chen Daqing, Gu Jihua, et al. An image digital watermarking with phase retrieval algorithm and Fourier transformation hologram [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, 29(12):3310-3316.
- [9] Zuo Chao, Chen Qian. Computational optical imaging: an overview [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2022, 51(2):181. (in Chinese)  
左超, 陈钱. 计算光学成像: 何来, 何处, 何去, 何从? [J]. *红外与激光工程*, 2022, 51(2):181.
- [10] Gerchberg R W, O. A S W. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures [J]. *Optik*, 1972, 35:237-250.
- [11] Misell L D. A method for the solution of the phase problem in electron microscopy [J]. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 1973, 6(1):L6-L9.
- [12] Gu Benyuan, Yang Guozhen, Dong Bizhen. Algorithms for amplitude and phase recovery problems in optical systems and electron microscopy [J]. *Advances in Physics*, 1988, (3):365-382. (in Chinese)  
顾本源, 杨国桢, 董碧珍. 光学系统和电子显微系统中振幅和相位恢复问题的算法 [J]. *物理学进展*, 1988, (3):365-382.
- [13] Brady G R, Fienup J R. Nonlinear optimization algorithm for retrieving the full complex pupil function [J]. *Optics Express*, 2006, 14(2):474-86.

- [14] Gu Xiang, Xu Keshu. Some improvements on the GS algorithm in phase retrieval problem[J]. Journal of FuDan University: Natural Science, 2000, 39(2): 7. (in Chinese) 顾翔, 徐克璠. 用于相位恢复的 GS 算法的一点改进[J]. 复旦学报: 自然科学版, 2000, 39(2): 7.
- [15] Huang Lixin, Yao Xin, Cai Dongmei, et al. A high accuracy and fast iterative algorithm for phase retrieval[J]. Chinese Journal of Lasers, 2010, (5): 4. (in Chinese) 黄利新, 姚新, 蔡冬梅, 等. 一种快速高精度的相位恢复迭代法[J]. 中国激光, 2010, (5): 4.
- [16] Peng Jimeng, Du Shaojun, Jiang Pengzhi. Phase retrieval based on improved GS algorithm[J]. High Power Laser and Particle Beams, 2013, 25(2): 4. (in Chinese) 彭金猛, 杜少军, 蒋鹏志. 基于 GS 加权改进算法的相位恢复[J]. 强激光与粒子束, 2013, 25(2): 4.
- [17] Fienup J R. Reconstruction of an object from modulus of its Fourier transform [J]. Optics Letters, 1978, 3(1): 27 - 29.
- [18] R Fienup. Phase retrieval algorithms: a comparison [J]. Applied Optics, 1982, 21(15): 2758 - 2769.
- [19] J R Fienup. Phase-retrieval algorithms for a complicated optical system [J]. Applied Optics, 1993, 32(10): 1737 - 1745.
- [20] Fienup J R, Marron J C, Schulz T J, et al. Hubble space telescope characterized by using phase-retrieval algorithms [J]. Appl Opt, 1993, 32(10): 1747 - 1767.
- [21] Fienup J R. Phase retrieval for the Hubble Space Telescope using iterative propagation algorithms [J]. Proceedings of SPIE-the International Society for Optical Engineering, 1991, 1567: 327 - 332.
- [22] Fienup J R. HST aberrations and alignment determined by phase retrieval algorithms [J]. Space Optics for Astrophysics and Earth and Planetary Remote Sensing, 1991, 19: 19 - 21.
- [23] Fienup J R. Phase retrieval algorithms: a personal tour [Invited] [J]. Appl. Opt., 2013, 52(1): 45 - 56.
- [24] Millane R P, Stroud W J. Reconstructing symmetric images from their undersampled Fourier intensities [J]. Journal of the Optical Society of America A, 1997, 14(3): 568 - 579.
- [25] Guo C, Liu S, Sheridan J T. Iterative phase retrieval algorithms. I: optimization [J]. Applied Optics, 2015, 54(15): 4709.
- [26] Teague M R. Deterministic phase retrieval: a Green's function solution [J]. J. Opt. Soc. Am. A, 1983, 73(11): 1434 - 1441.
- [27] Gureyev T E, Nugent K A. Rapid quantitative phase imaging using the transport of intensity equation [J]. Optics Communications, 1997, 133(1-6): 339 - 346.
- [28] Bolda E L, Tan S M, Walls D F. Measuring the quantum state of a Bose-Einstein condensate [J]. Phys. Rev. A, 1998, 57(57): 4686 - 4694.
- [29] Xiao W. Phase retrieval based on intensity transport equation [J]. Acta Optica Sinica, 2007, 27(12): 2117 - 2122.
- [30] Allen L J, Oxley M P. Phase retrieval from series of images obtained by defocus variation [J]. Optics Communications, 2001, 199(1-4): 65 - 75.
- [31] Roddier F, Roddier C. Wavefront reconstruction using iterative Fourier transforms [J]. Appl Opt, 1991, 30(11): 1325 - 1327.
- [32] Roddier C, Roddier F. Wave-front reconstruction from defocused images and the testing of ground-based optical telescopes [J]. Journal of the Optical Society of America. A, Optics and Image Science, 1993, 10(11): 2277 - 2287.
- [33] Ichikawa K, Lohmann A W, Takeda M. Phase retrieval based on the irradiance transport equation and the Fourier transform method: experiments [J]. Applied Optics, 1988, 27(16): 3433 - 6.
- [34] Roddier F. Curvature sensing and compensation: a new concept in adaptive optics [J]. Applied Optics, 1988, 27(7): 1223 - 1225.
- [35] Gureyev T E, Roberts A, Nugent K A. Partially coherent fields, the transport-of-intensity equation, and phase uniqueness [J]. Journal of the Optical Society of America A, 1995, 12(9): 1942 - 1946.
- [36] Gureyev T E, Roberts A, Nugent K A. Phase retrieval with the transport-of-intensity equation: matrix solution with use of Zernike polynomials [J]. Journal of the Optical Society of America A, 1995, 12(9): 1932 - 1942.
- [37] Gureyev T E, et al. Phase retrieval with the transport-of-intensity equation. II. Orthogonal series solution for nonuniform illumination [J]. Journal of the Optical Society of America A, 1996, 13(8): 1670 - 1682.
- [38] Nugent K A, Paganin D, Barnea Z, et al. Quantitative phase imaging using hard x rays [C] // Coherent Electron-Beam X-Ray Sources: Techniques and Applications. International Society for Optics and Photonics, 1997.
- [39] Aman, P J, McMahon, K A, Nun, et al. Imaging: phase radiography with neutrons [J]. Nature, 2000, 408: 158 - 159.
- [40] Bajt S, Barty A, Nugent K A, et al. Quantitative phase-

- sensitive imaging in a transmission electron microscope [J]. *Ultramicroscopy*, 2000, 83(1-2): 67-73.
- [41] Beleggia M, Schofield M A, Volkov V V, et al. On the transport of intensity technique for phase retrieval [J]. *Ultramicroscopy*, 2004, 102(1): 37-49.
- [42] Wang Xiao, Mao Hang, Zhao Dazun. Phase retrieval based on intensity transport equation [J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, 27(12): 6. (in Chinese)  
王潇, 毛珩, 赵达尊. 基于光强传播方程的相位恢复 [J]. *光学学报*, 2007, 27(12): 6.
- [43] Xue Bindang, Zheng Shiling, Jiang Zhiguo. Phase retrieval using transport of intensity equation solved by full multigrad method [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, (6): 5. (in Chinese)  
薛斌党, 郑世玲, 姜志国. 完全多重网格法求解光强度传播方程的相位恢复方法 [J]. *光学学报*, 2009(6): 5.
- [44] Shan Shankou, Laura Waller, George Barbastathis, et al. Transport-of-intensity approach to differential interference contrast (TI-DIC) microscopy for quantitative phase imaging [J]. *Optics Letters*, 2010, 35(3): 447-449.
- [45] Cheng Hong, Zhang Quanbing, Wei Hui, et al. Phase retrieval based on transport-of-intensity equation [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2011, 40(10): 5. (in Chinese)  
程鸿, 章权兵, 韦穗, 等. 基于强度传输方程的相位检索 [J]. *光子学报*, 2011, 40(10): 5.
- [46] Guo Junhu. Study of phase retrieval method from intensities of coherent light [D]. Wuhan: Huazhong University of Science & Technology, 2011. (in Chinese)  
郭俊虎. 相干光光强恢复相位的方法研究 [D]. 武汉: 华中科技大学, 2011.
- [47] Liang Li, Yang Ling, Wang Zhongke, et al. Two-dimensional phase retrieval based on TIE and accelerate angular spectrum iteration algorithm [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2013, 50(2): 5. (in Chinese)  
梁丽, 杨玲, 王中科, 等. 基于 TIE 和加速角谱迭代算法的二维相位恢复 [J]. *激光与光电子学进展*, 2013, 50(2): 5.
- [48] Guo Yiming, Zhang Fang, Song Qiang, et al. Application of hybrid iterative algorithm in TIE phase retrieval with large defocusing distance [J]. *Acta Optica Sinica*, 2016, (9): 10. (in Chinese)  
郭怡明, 张方, 宋强, 等. 一种混合迭代算法在大离焦距离 TIE 相位恢复中的应用 [J]. *光学学报*, 2016, (9): 10.
- [49] Faulkner H M L, Rodenburg J M. Movable aperture lensless transmission microscopy: a novel phase retrieval algorithm [J]. *Physical Review Letters*, 2004, 93(2): 023903.
- [50] Rodenburg J M, Faulkner H M L. A phase retrieval algorithm for shifting illumination [J]. *Applied Physics Letters*, 2004, 85(20): 4795-4797.
- [51] Faulkner H, Rodenburg J M. Error tolerance of an iterative phase retrieval algorithm for moveable illumination microscopy [J]. *Ultramicroscopy*, 2005, 103(2): 153-164.
- [52] Zheng G, Horstmeyer R, Yang C. Wide-field, high-resolution Fourier ptychographic microscopy [J]. *Nature Photonics*, 2015, 9(9): 621-621.