

基于光谱易变性低秩正交先验的高光谱解混

马飞¹, 李树雪¹, 杨飞霞², 徐光宪¹

(1. 辽宁工程技术大学 电子与信息工程学院, 辽宁 葫芦岛 125105; 2. 辽宁工程技术大学 电气与控制工程学院, 辽宁 葫芦岛 125105)

摘要: 高光谱解混是通过图像分解提取端元及丰度特征的过程, 然而由光照、大气等因素引起的光谱类内易变性, 或者由环境变化、设备等非线性因素导致的谱间易变性, 会导致特征提取精度下降。为了全面考虑解混过程中光谱变化的问题, 本文引入光谱易变性的低秩正交先验提出了一种增强型的光谱解混优化模型。首先, 在线性解混模型基础上引入易变性数据拟合项来同时考虑光谱类内和类间变化, 利用缩放因子来解决光谱类内易变性, 同时增加光谱易变性扰动矩阵来解决谱间易变性。其次, 该模型利用正交先验约束来实现原光谱字典与易变性项的空间低相干性, 通过采用核范数对数松弛来强化丰度矩阵的低秩特性, 抑制微小分量及噪声。最后, 采用交替优化法及向量-矩阵算子降低求解算法复杂度。通过模拟数据集和真实数据集仿真测试结果表明, 本文所提算法取得了优于对比算法的良好性能, 验证了该优化模型的有效性。

关键词: 高光谱解混; 光谱易变性; 低秩; 正交先验; 稀疏性

中图分类号: TP751.1; O433 **文献标识码:** A **DOI:** 10.3969/j.issn.1001-5078.2024.04.023

Hyperspectral unmixing based on low rank orthogonal priors for spectral variability

MA Fei¹, LI Shu-xue¹, YANG Fei-xia², XU Guang-xian¹

(1. School of Electronic and Information Engineering, Liaoning Technical University, Huludao 125105, China;
2. School of Electrical and Control Engineering, Liaoning Technical University, Huludao 125105, China)

Abstract: Hyperspectral unmixing is the process of extracting endmembers and abundance features through image decomposition. However, intra-spectral variability caused by factors such as illumination and atmosphere, or inter-spectral variability caused by non-linear factors such as environmental changes and equipment, can lead to a decrease in feature extraction accuracy. To comprehensively consider the issue of spectral changes during the unmixing process, an enhanced spectral unmixing optimization model is proposed in this paper by introducing a low-rank orthogonal prior for spectral variability. Firstly, a variability data fitting term is introduced on top of the linear unmixing model to account for both intra-class and inter-class spectral variations. And a scaling factor is used to address intra-class variability in the spectrum, while a spectral variability perturbation matrix is added to address inter-class variability. Secondly, the model utilizes orthogonal prior constraints to achieve the low spatial coherence between the original spectral dictionary and the variability term, and suppresses tiny components and noise by employing kernel norm logarithmic relaxation to strengthen the low-rank property of the abundance matrix. Finally, the alternating optimization method and vector-matrix operator are used to reduce the complexity of the solution algorithm. The results of simulation tests on both simulated and real datasets show that the proposed algorithm achieves better performance than the comparison algorithm, which verifies the effectiveness of the optimization model.

Keywords: hyperspectral unmixing; spectral variability; low rank; orthogonal prior; sparsity

基金项目: 国家自然科学基金面上项目 (No. 61971210); 辽宁省科技厅自然科学基金面上项目 (No. MS-314); 辽宁省教育厅科学研究面上项目 (No. LJKZ0357) 资助。

作者简介: 马飞 (1978-), 男, 博士, 副教授, 研究方向为遥感图像处理、机器学习与凸优化。E-mail: femircom@gmail.com

通讯作者: 李树雪 (1998-), 女, 硕士研究生, 研究方向为遥感图像处理。E-mail: 17852270103@163.com

收稿日期: 2023-04-26; **修订日期:** 2023-07-13

1 引言

高光谱遥感是将光谱技术与成像技术相结合的多维信息获取技术。高光谱传感器可以同时获取反映物质辐射的光谱信息和二维空间结构的图像信息,因此高光谱同时具有了“图像立方体”的形式和结构,实现了“图谱合一”^[1-2]。目前高光谱遥感技术在矿产勘探、空间研究、环境监测和国防军事等领域都产生了重要的应用价值。然而,光谱成像系统受大气、光线变化、地物复杂分布的影响,导致观察到的像素均为混合状态,极大的影响了材料的分析,因此高光谱解混工作发挥了很重要的作用^[3]。

当前高光谱图像解混在深度学习中取得了不错的成果。深度学习在高光谱解混中运用灵活,原则上可以处理在训练数据中所表示的任何效果。由于解混问题的无监督性质,作为一种无监督学习结构的自动编码器成为研究的热点问题。例如, S. Shi 等人^[4]将通过鉴别器从高光谱图像中提取的端元束的概率分布与生成的端元相关联,提出了一种基于变分自动编码器的具有端元易变性的空间光谱解混深度生成模型。D. Hong 等人^[5]提出了一种端元引导的解混网络(EGU-Net)。EGU-Net 是一个双流深度网络,它从纯的或接近纯的端元学习额外的网络,通过共享网络参数和添加频谱约束来校正另一个解混网络的权重,从而获得解混方案。虽然这些设计取得了合理的解混结果,但深度学习的训练过程非常复杂且耗时,而且结果受到训练数据的影响,如果训练数据不充分,最终的结果将出现偏差,这都对光谱解混增加了难度。

贝叶斯方法的目标是通过构造端元和丰度的最大后验概率完成光谱解混。贝叶斯特征学习模型最初是由 Schmidt^[6]提出,由 Armgren^[7]改进后应用于光谱解混。Y. Fang 等人^[8]提出了一个贝叶斯全卷积高光谱解混网络,采用深度图像先验来加强丰度图中空间信息的描述,并设计了一个具有各向异性协方差矩阵的多变量高斯分布来描述光谱观测的条件分布,最后将上述部分整合到贝叶斯框架中以实现丰度的估计。贝叶斯求解可以有效考虑不同的统计特性,更好地拟合和分析数据,但贝叶斯方法进行光谱解混容易受到预处理的影响,丰度概率先验信息不充足,计算复杂度高。

相比前两种方法,矩阵模型具有计算简单、效率高以及物理意义明确等优点。它可以捕捉图像中的

复杂空间和光谱结构,有效地提取出图像中的特征信息。高光谱解混最简单最经典的矩阵模型为线性混合模型(LMM)。LMM 假设每条光线在到达传感器之前只与单一材料相互作用,将每个像素作为端元的线性组合。然而,在高光谱解混过程中存在着多种挑战,光谱易变性就是其中之一。光谱变化意味着一个特定的端元特征在特定图像中不一定是唯一的。当端元受到光谱变化影响时,LMM 在识别端元及估计对应丰度方面的准确性将会下降^[9]。

光谱易变性可以分为两类^[10],一是特定类内端元内部的易变性(类内易变性),它主要是由于光照、大气等因素引起的,使所观察的像素变为每个端元的缩放版本的线性组合;二是不同类的端元之间的谱相似性(类间易变性),如农田中的作物和杂草或矿物之间的光谱相似性,或由环境变化,仪器配置等因素导致的由一种物质变为另一种相似物质的现象。为消除光谱易变性对高光谱解混结果产生的负面影响,人们通过不断地深入研究,提出了不同的模型。Thouvenin 等人^[11]提出一种加性扰动模型(PLMM),考虑到端元的类间易变性增加了一个扰动向量 dM ,这也是第一次明确提出将端元的易变性建模为一个加性扰动。Drumetz 等人^[12]提出一种像素级的空间相干性的局部变化,即通过引入缩放因子使得端元在每个像素中发生变化的扩展线性混合模型(ELMM),以解决处理光谱的类内变化。D. Hong 等人^[13]提出了一种增广线性混合模型(ALMM),其中采用端元字典对光照产生的光谱类内变化进行建模,又引入易变性字典模拟非线性混合效应引起的其他光谱易变性。G. Zhang 等人^[14]考虑了谱间易变性问题,直接从端元字典中提取光谱易变性,再通过对丰度和易变性系数进行稀疏平滑提出了一种基于凸优化的谱易变性增广稀疏解混模型(SVASU)。但综合来看,上述算法只是片面的从类内或类间一方面去考虑光谱变化,没有引入明确的光谱易变性数据拟合项去同时考虑类内和类间易变性,以及没有考虑到噪声或其他干扰因素的存在,导致解混结果不精确。

通过综合考虑已提出模型的优点和不足,本文提出一种基于低秩正交先验的光谱易变性解混模型(LRC-SU),通过引入缩放因子和易变性扰动矩阵来解决解混过程中的光谱变化问题。具体贡献总结如下:首先,本文通过提出包含缩放因子和易变性扰动

矩阵的拟合项来同时考虑光谱类内和类间易变性问题。其次,通过提出一个合理的正交先验信息,对光谱易变性矩阵和端元字典施加正则项来实现端元与谱易变性扰动矩阵的低相干性。然后,对丰度矩阵施加 L_1 范数来促进稀疏,以及对丰度矩阵施加对数和函数来增加它的低秩特性,抑制噪声和干扰信息。最后,采用交替优化法和向量-矩阵算子得到了一种有效的闭式解,降低了计算复杂度。

2 信号模型

2.1 线性混合模型

设 $Y = [y_1, \dots, y_N] \in \mathbb{R}^{L \times N}$ 表示高光谱图像,其中 L 为频带数, N 为像素个数。设 $A = [a_1, \dots, a_p] \in \mathbb{R}^{L \times p}$ 是含有 p 个端元的混合矩阵并且 $M = [m_1, \dots, m_i, \dots, m_N] \in \mathbb{R}^{p \times N}$ 为丰度矩阵,每个列向量表示每个像素处的丰度向量。考虑到上述定义, LMM 可以表示为:

$$Y = AM + E_1 \quad (1)$$

其中, E_1 表示噪声及误差矩阵。端元矩阵和丰度矩阵应该满足丰度非负约束(ANC)以及丰度和为一约束(ASC),即:

$$A \geq 0_{L \times p}, M \geq 0_{p \times N}, M^T \mathbf{1}_p = \mathbf{1}_N \quad (2)$$

其中, $\mathbf{1}_N = [1, 1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^N$ 。

高光谱图像中所包含的材料的光谱特征可能会受到不同光照、大气和环境的显著影响而发生变化。这种情况下, LMM 中的元素仅使用单一的端元矩阵 A , 忽略了端元的光谱变化,将会导致比例不确定性等问题。这将使得由端元光谱估计误差传递到丰度的估计误差,从而影响解混结果的准确性。

2.2 易变性模型

2.2.1 乘性易变性项

文献[12]和[15]中实验验证了通过给每个像素施加一个乘性易变性项(即缩放因子)可以有效解决由大气或光照因素引起的端元外在易变性。缩放因子可由端元字典 A 给出。式(1)可改写为:

$$Y = AXS + E_2 \quad (3)$$

其中, $X = [x_1, \dots, x_i, \dots, x_N] \in \mathbb{R}^{p \times N}$ 为丰度矩阵; $S \in \mathbb{R}^{p \times p}$ 称为缩放矩阵,是一个对角线矩阵; $s_n = \text{diag}(S)$ 为缩放矩阵 S 对角线上的值; $s_n \geq 0$, E_2 表示噪声及误差矩阵。

几何意义如图 1 所示, (y_i, y_j) 表示数据点,端元由点 $(\alpha_0^1, \alpha_0^2, \alpha_0^3)$ 表示, $(S_{c1}, \alpha_0^c, S_{c2}, \alpha_0^c, c = 1, 2, 3)$ 是得到的像素的缩放版本。假设存在三个端元,数

据点在由参考端元跨越的锥中,缩放因子与 ANC 和 ASC 相结合,将每个像素限制在一个单纯形中。顶点是端元经过缩放因子后的变体,位于连接原点和每个端元的直线上[12]。

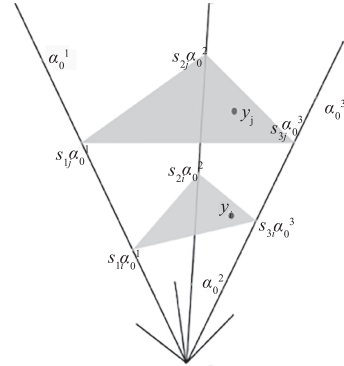


图 1 端元缩放几何图

Fig. 1 Endmember scaling image

2.2.2 加性易变性项

为验证谱易变性不仅包括线性变化还存在其他非线性因素引起的变化,我们从 Houston 图像中绘制了四个端元的随机子集。结果如图 2 所示,虚线为真实端元曲线,实线为通过 VCA 获取的端元光谱曲线,图中可以看出部分实线与虚线呈线性关系(可以通过缩放因子拟合),而另一部分无法仅通过线性拟合实现近似,表明这些端元的差异不仅是一个缩放因子引起的,还包括非线性因素。在解混中由不同光照和大气等因素所引起的光谱类内易变性可由端元经过缩放因子来解决,但对于环境条件等其他非线性混合因素导致的光谱类间变化,参考文献[11]和[13]中实验验证的方法,引入一个加性光谱易变性项来实现。可将上述优化等式改写为:

$$Y = AXS + VB + E_3 \quad (4)$$

其中, $V = [v_1, \dots, v_Q] \in \mathbb{R}^{L \times Q}$, $B = [b_1, \dots, b_N] \in \mathbb{R}^{Q \times N}$ 分别表示作为高光谱解混先验的光谱易变性矩阵以及相应的系数矩阵; E_3 表示噪声及误差矩阵,端元字典 A 已给出。

光谱易变性变量 V 可以根据文献[14]所提出的一种基于空间光谱相关性的易变性提取方法进行获取,其主要思想是将每个像素与其具有高空间相关性的空间邻近的平均光谱特征进行比较,收集每个像素中存在差异的光谱。光谱易变性矩阵 V 的物理意义是用来解释那些无法用尺度缩放来表示的端元,包括类间易变性及部分类内易变性。式(4)中的 VB 项包含了光谱库中未存在的新材料,表明 V 与光谱库所提供的端元具有低相干性。

3 提出的方法

3.1 优化问题

考虑到上述模型的不适定性及稀疏性,提出了具有以下正则化项的约束优化问题:

$$\begin{aligned} \operatorname{argmin}_{M, X, V, B, S} & \frac{1}{2} \|Y - AM\|_F^2 + \alpha \|Y - AXS - VB\|_F^2 + \\ & F(M) + H(X) + J(V) \quad \text{s. t. } M \geq 0, X \geq 0, S \geq 0 \end{aligned} \quad (5)$$

上述等式的第二项作为一个谱易变性数据增强拟合项,将第一项像素的重构误差进一步表示为光谱易变性的影响。 α 用于平衡光谱库和光谱易变性数据拟合的贡献大小,正则项 $F(M) = \lambda \|M\|_1$, 目的是促进丰度矩阵 M 的稀疏性, λ 为权重系数。另外当采用 L_1 范数稀疏正则化时 ASC 约束条件是常数,因此仅考虑非负约束条件。

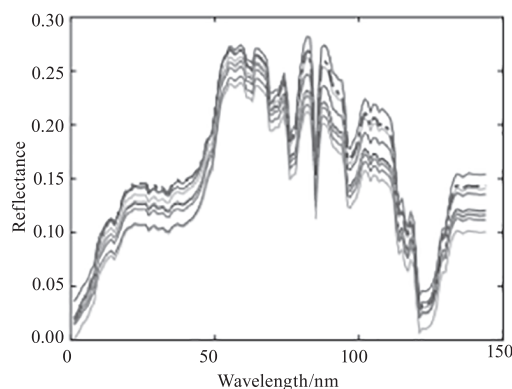
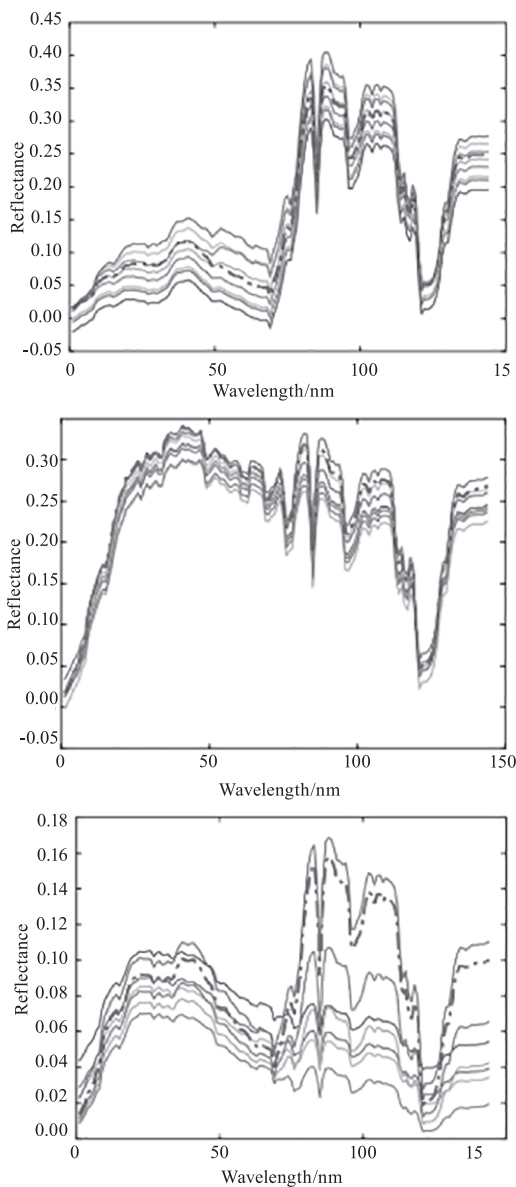


图2 光谱易变性图(虚线表示真实端元光谱曲线,实线表示受易变性影响的光谱曲线)

Fig. 2 Spectral variability map

3.1.1 低秩正则项

一般情况下矩阵的秩等于正奇异值的个数,但由于非凸性,难以直接求解。为了解决这个问题,核范数通常是一个低秩的凸代理,它等于矩阵奇异值的和。

最近的一项研究^[16]表明,低秩问题的凸松弛适用于更一般的情况,即对数和函数可以更有效地加强矩阵的低秩性,且文中结果表明,矩阵中较大的奇异值表示主要特征或结构信息,而较小的奇异值主要包含噪声或干扰。核范数平等的对待所有的奇异值,而对数和函数则侧重于较大的奇异值^[17],我们经过实验验证了此结论,详见消融实验。由于我们模型中想要侧重主要特征,减少噪声等干扰信息的影响。因此采用了对数和函数的松弛形式来强化丰度矩阵的低秩特性。

$$H(X) = \beta \sum_i \log(\sigma_i(X) + \varepsilon) \quad (6)$$

其中, ε 表示一个很小的正数,避免出现奇异值为 0 的情况。

3.1.2 正交先验正则项

$$J(V) = \frac{\gamma}{2} \|A^T V\|_F^2 \quad (7)$$

为了在优化问题中有效地找到更好的局部最优解,我们提出式(7)作为一个先验信息,用来表示为易变性扰动矩阵 V 与端元字典 A 的低相关性^[13]。

3.2 算法的求解

为了保证问题的凸性,通过采用交替优化来解决(5),可以将其解耦为:

$$M^{k+1} = \operatorname{argmin} f(M) \quad (8a)$$

$$B^{k+1} = \operatorname{argmin} f(B, X^k, S^k, V^k) \quad (8b)$$

$$X^{k+1} = \operatorname{argmin} f(B^{k+1}, X, S^k, V^k) \quad (8c)$$

$$S^{k+1} = \operatorname{argmin} f(B^{k+1}, X^{k+1}, S, V^k) \quad (8d)$$

$$V^{k+1} = \operatorname{argmin} f(B^{k+1}, X^{k+1}, S^{k+1}, V) \quad (8e)$$

其中, k 表示迭代次数; $f(M, B, X, S, V)$ 表示目标函数。

3.2.1 对 M 的优化

对等式(8a)进行变量分离可得:

$$\begin{aligned} \operatorname{argmin}_{M, N} & \frac{1}{2} \|Y - AN\|_F^2 + \lambda \|M\|_1 + I_{R_+}(M) \\ \text{s. t. } & SN = M \end{aligned} \quad (9)$$

其中, $I_{R_+}(\cdot)$ 为非负正交投影函数。进一步得到相应的拉格朗日等式为:

$$\begin{aligned} L(M, N) = & \frac{1}{2} \|Y - AN\|_F^2 + \lambda \|M\|_1 + I_{R_+}(M) + \\ & \Omega^T(N - M) + \frac{\xi}{2} \|N - M\|_F^2 \end{aligned} \quad (10)$$

(1) 优化 M

M 的优化等式为:

$$\begin{aligned} \operatorname{argmin}_M & \lambda \|M\|_1 + I_{R_+}(M) + \Omega^T(N - M) + \\ & \frac{\xi}{2} \|N - M\|_F^2 \end{aligned} \quad (11)$$

将式(11)向量化,得到:

$$\begin{aligned} \operatorname{argmin}_{\hat{m}} & \lambda \|\hat{m}\|_1 + I_{R_+}(\hat{m}) + \hat{\omega}^T(\hat{n} - \hat{m}) + \\ & \frac{\xi}{2} \|\hat{n} - \hat{m}\|_2^2 \end{aligned} \quad (12)$$

其中, $\hat{n} = \operatorname{vec}(N) \in \mathbb{R}^{PN \times 1}$, $\hat{m} = \operatorname{vec}(M) \in \mathbb{R}^{PN \times 1}$, $\hat{\omega} = \operatorname{vec}(\Omega) \in \mathbb{R}^{PN \times 1}$ 。由于 \hat{m} 是非负的,所以 $\|\hat{m}\|_1 = \mathbf{1}_{PN}^T \hat{m}^{\lceil 18 \rceil}$,使得等式(12)重写为:

$$\begin{aligned} \operatorname{argmin}_{\hat{m}} & \lambda \mathbf{1}_{PN}^T \hat{m} + I_{R_+}(\hat{m}) + \hat{\omega}^T(\hat{n} - \hat{m}) + \\ & \frac{\xi}{2} \|\hat{n} - \hat{m}\|_2^2 \end{aligned} \quad (13)$$

解析表达式为:

$$\hat{m} \leftarrow \hat{n} - \frac{\lambda}{\xi} \mathbf{1}_{PN} - \frac{1}{\xi} \hat{\omega} \quad (14)$$

最后,再由向量 \hat{m} 重构矩阵 M 。

(2) 优化 N

N 的优化等式为:

$$\begin{aligned} \operatorname{argmin}_N & \frac{1}{2} \|Y - AN\|_F^2 + \Omega^T(N - M) + \\ & \frac{\xi}{2} \|N - M\|_F^2 \end{aligned} \quad (15)$$

解析表达式为:

$$N \leftarrow [A^T A + \xi I]^{-1} [A^T Y - \Omega + \xi M] \quad (16)$$

3.2.2 对 B 的优化

根据 N 的优化同理得到(8b)中 B 的解析表达式为:

$$B^{k+1} \leftarrow [(V^k)^T V^k]^{-1} [(V^k)^T (Y - AX^k S^k)] \quad (17)$$

3.2.3 对 X 的优化

由于(8c)包含对数核范数和非负项,无法直接求解。因此,采用 ADMM 通过添加方程约束来进行变量分离。得到关于 X 的优化等式为:

$$\begin{aligned} \operatorname{argmin}_{X, G, H} & \alpha \|Y - AXS - VB\|_F^2 + H(G) + I_{R_+}(H) \\ \text{s. t. } & SG = X, H = X \end{aligned} \quad (18)$$

进一步可得相应的拉格朗日等式:

$$\begin{aligned} L(X, G, H) = & \alpha \|Y - AXS - VB\|_F^2 + \Lambda^T(G - X) \\ & + \Psi^T(H - X) + \frac{\xi}{2} \|H - X\|_F^2 + \frac{\xi}{2} \|G - X\|_F^2 \end{aligned} \quad (19)$$

(1) 优化 X

利用公式 $\operatorname{vec}(AXB) = (B^T \otimes A)\operatorname{vec}(X)$ 对 X 进行向量化,得到:

$$\begin{aligned} \operatorname{argmin}_{\alpha} & \alpha \|\hat{y} - \operatorname{vec}(AXS) - V_1 \hat{b}\|_2^2 + \\ & \frac{\xi}{2} \left\| \hat{h} - \hat{x} + \frac{\hat{v}}{\xi} \right\|_2^2 + \frac{\xi}{2} \left\| \hat{g} - \hat{x} + \frac{\tilde{\lambda}}{\xi} \right\|_2^2 \end{aligned} \quad (20)$$

其中, $\hat{x} = \operatorname{vec}(X)$, $V_1 \hat{b} = (I_N \otimes V)\operatorname{vec}(B)$, $V_1 \in \mathbb{R}^{LN \times QN}$, $\tilde{b} \in \mathbb{R}^{QN \times 1}$ 。同样地, $\tilde{h} = \operatorname{vec}(H) \in \mathbb{R}^{PN \times 1}$, $\tilde{g} = \operatorname{vec}(G) \in \mathbb{R}^{PN \times 1}$, $\tilde{v} = \operatorname{vec}(\Psi) \in \mathbb{R}^{PN \times 1}$, $\tilde{\lambda} = \operatorname{vec}(\Lambda) \in \mathbb{R}^{PN \times 1}$ 。

它的解析表达式为:

$$\begin{aligned} \hat{x}^{k+1} \leftarrow & [2\alpha((S^k)^T \otimes A^k)^T ((S^k)^T \otimes A^k) + \\ & 2\xi I]^{-1} [2\alpha((S^k)^T \otimes A^k)^T \hat{y} - 2\alpha((S^k)^T \otimes A^k)^T V_1^k \\ & \hat{b}^{k+1} + \tilde{\lambda}^k + \tilde{v}^k + \xi(\tilde{g}^k + \tilde{h}^k)] \end{aligned} \quad (21)$$

最后,再由向量 \hat{x} 重构矩阵 X 。

(2) 优化 G

G 的优化等式为:

$$\begin{aligned} \operatorname{argmin}_G & \beta \sum_i \log(\sigma_i(G) + \varepsilon) + \Lambda^T(G - X) + \\ & \frac{\xi}{2} \|G - X\|_F^2 \end{aligned} \quad (22)$$

根据文献[19],可得解析表达式为:

$$(G^{k+1})^+ \leftarrow D_{\frac{1}{\xi}, \varepsilon}(X^{k+1} - \frac{\Lambda^k}{\xi}) \quad (23)$$

这里, $D_{\frac{1}{\xi}, \varepsilon}(\cdot)$ 是阈值操作符,定义为:

$$D_{\alpha, \varepsilon}(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } c_2 \leq 0 \\ \operatorname{sign}(x) \left(\frac{c_1 + \sqrt{c_2}}{2} \right), & \text{if } c_2 > 0 \end{cases} \quad (24)$$

其中, $c_1 = |x| - \varepsilon$, $c_2 = (c_1)^2 - 4(\alpha - \varepsilon|x|)$ 。

(3) 优化 H

同理,得 H 的解析表达式为:

$$H^{k+1} \leftarrow \max\{0, X^{k+1} - \frac{\Psi^k}{\xi}\} \quad (25)$$

3.2.4 对 S 的优化

等式(8d)中包含 S 的非负约束,因此通过添加分离变量可得优化等式为:

$$\begin{aligned} & \operatorname{argmin}_{S, T} \alpha \|Y - AXS - VB\|_F^2 + I_{R_+}(T) \\ & \text{s. t. } T = S \end{aligned} \quad (26)$$

进一步得拉格朗日等式为:

$$L(S, T) = \alpha \|Y - AXS - VB\|_F^2 + \Delta^T(T - S) + \frac{\xi}{2} \|T - S\|_F^2 \quad (27)$$

(1) 优化 S

同理, S 的解析表达式为:

$$S^{k+1} \leftarrow [2\alpha(X^{k+1})^T A^T AX^{k+1} + \xi I]^{-1} \times [2\alpha(X^{k+1})^T A^T Y - 2\alpha(X^{k+1})^T A^T V^k B^{k+1} + \Delta^k + \xi T^k] \quad (28)$$

(2) 优化 T

解析表达式为:

$$T^{k+1} \leftarrow \max\{0, S^{k+1} - \frac{\Delta^k}{\xi}\} \quad (29)$$

3.2.5 对 V 的优化

其闭式解为针对谱易变性扰动矩阵 V 的处理存在两种情况。如果 V 已知,则不需要在迭代中更新;

如果 V 未知,则在变量迭代过程中将下式一起更新。根据上述方法引入分离变量,重写等式(8e)得到:

$$\begin{aligned} & \operatorname{argmin}_{V, Q} \alpha \|Y - AXS - VB\|_F^2 + J(Q) \\ & \text{s. t. } Q = V \end{aligned} \quad (30)$$

它的拉格朗日等式为:

$$L(V, Q) = \alpha \|Y - AXS - VB\|_F^2 + \Phi^T(Q - V) + \frac{\xi}{2} \|Q - V\|_F^2 \quad (31)$$

(1) 优化 V

其解析表达式为:

$$V^{k+1} \leftarrow [2\alpha(Y(B^{k+1})^T - AX^{k+1}S^{k+1}(B^k)^T) + \xi Q^k + \Phi^k] \times [2\alpha B^{k+1}(B^{k+1})^T + \xi I]^{-1} \quad (32)$$

(2) 优化 Q

解析表达式为:

$$Q^{k+1} \leftarrow [\gamma AA^T + \xi I]^{-1} [\xi V^{k+1} - \Phi^k] \quad (33)$$

综上所述,算法 1 采用交替优化迭代了 LRC-SU 算法的闭式解(假设 V 未知)。另外我们将 SCLSU 算法生成的丰度设置为初始值 M_0 ,并生成一个随机正交矩阵来进行光谱易变性矩阵 V_0 的初始化。

4 实验

4.1 参数设定

为了评价我们的方法性能,使用了一组真实数据集和两组模拟数据集对所提出的 LRC-SU 算法进行了一些实验探讨。并将其与现有的几种方法进行了比较,包括 FCLSU、PLMM、ELMM、ALMM、LMM-SBD^[20]、MAC-U^[21]。对于上述所提算法,每个光谱库所对应的系数矩阵为随机初始化矩阵,每个算法中参数设定为最优参数。对于所提出的 LRC-SU 模型的性能主要受 $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \xi$ 五个参数的影响。如图 3 所示,通过在三个不同数据集上进行试验验证,最终找到了相对稳定的参数来使算法性能达到最优效果。将五个参数分别设定为 $\alpha = 1 \times 10^{-1}, \beta = \lambda = 1 \times 10^{-4}, \gamma = 1 \times 10^{-2}, \xi = 1 \times 10^{-6}$ 。

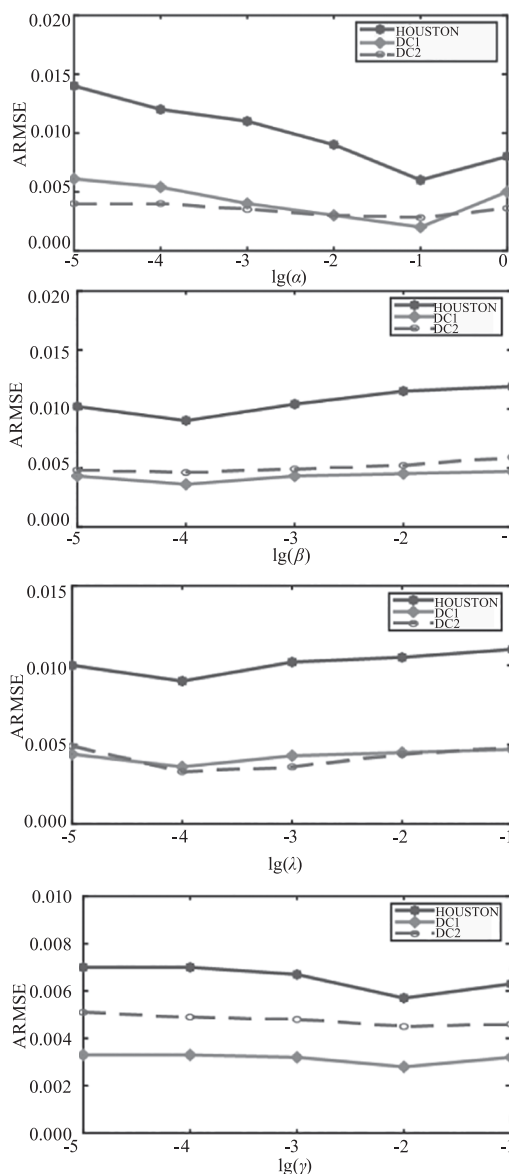


图 3 参数敏感度图

Fig. 3 Parameters sensitivity map

算法 1: 基于易变性低秩正交先验的高光谱解混方法 (LRC-SU)

```

输入:  $Y, A, \alpha, \beta, \gamma, \xi$ 
输出:  $M, X, S, V, B$ 
初始化:  $S_0 = I, B_0 = 0, G_0 = H_0 = X_0 = 0, M_0, N_0 = 0, V_0,$ 
 $\Delta_0 = 0, A_0 = \Psi_0 = 0, Q_0 = 0, \Phi_0 = 0, t = 0, \maxIter = 30;$ 
While 没有达到停止条件 do:
    通过式 (8a) 更新  $M$ ;
    While  $t < \maxIter$  do:
        通过式 (14) 更新  $M$ ;
        通过式 (16) 更新  $N$ ;
         $\Omega \leftarrow \Omega + \xi(N - M)$ ;
    end
    通过式 (17) 更新  $B$ ;
    通过式 (8c) 更新  $X$ ;
    While  $t < \maxIter$  do:
        通过式 (21) 更新  $X$ ;
        通过式 (23) 更新  $G$ ;
        通过式 (25) 更新  $H$ ;
         $\Lambda \leftarrow \Lambda + \xi(G - X)$ ;
         $\Psi \leftarrow \Psi + \xi(H - X)$ ;
    end
    通过 (8d) 更新  $S$ ;
    While  $t < \maxIter$  do:
        通过式 (28) 更新  $S$ ;
        通过式 (29) 更新  $T$ ;
         $\Delta \leftarrow \Delta + \xi(T - S)$ ;
    end
    通过 (8e) 更新  $V$ ;
    While  $t < \maxIter$  do:
        通过式 (32) 更新  $V$ ;
        通过式 (33) 更新  $Q$ ;
         $\Phi \leftarrow \Phi + \xi(Q - V)$ ;
    end
     $t = t + 1$ ;
end
返回  $M, X, S, V, B$ 

```

4.2 评价指标

为了观察所提出的解混方法的性能,采用以下几种方法进行评价。首先,利用丰度整体均方根误差 (ARMSE)^[13]来测量真实信号丰度与估计信号丰度之间的距离。其次,采用了均方根角度误差 (FAAE)^[22]公式对丰度指标进一步评价。最后,使用峰值信噪比 (PSNR)^[17]衡量重建图像的空间质量。

5 合成数据实验

5.1 数据描述

为了进一步定量对比不同算法的光谱解混能力,创建了两个合成数据集,一个是具有 50×50 像素的 DataCubes1 (DC1),另一个是具有 200×200 像素的 DataCubes2 (DC2)。DC1^[23]是从美国地质调查局 (USGS) 谱库^[24]中提取的,由 224 个波段、5 个端元以及空间相关丰度图构建的。对于数据集 DC1,

我们从真实高光谱图像中提取了树、沥青、金属、污垢以及屋顶五种材料。数据集 DC2 是从 USGS 谱库中随机选取的包含 5 个端元和 224 个可见和近红外光谱波段,利用高斯场生成 200×200 丰度图,以满足 ANC 和 ASC,目前已被广泛应用于^[12,25]。另外,该图像是通过添加缩放因子和复杂噪声来模拟的,以评估在光谱易变性存在时的解混能力,更多有关此数据的细节请参考文献 [12]。图 4(a)、(b) 分别为 DC1、DC2 的假彩色图像,(c)、(d) 分别为两个模拟数据集相对应的端元。

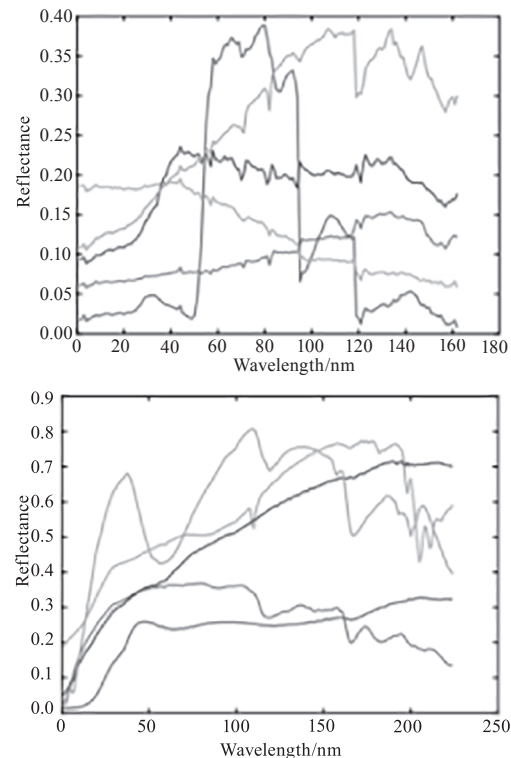
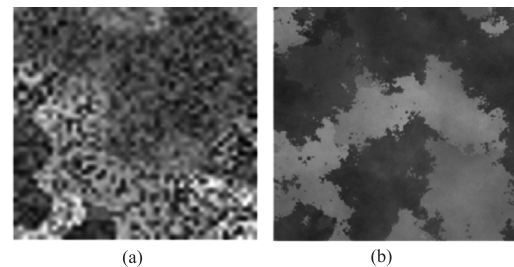


图 4 模拟数据假彩图及端元图

Fig. 4 Simulated data false color map and endmember map

5.2 实验设置

对于数据集 DC1,我们使用从真实的高光谱图像中提取的沥青、树、屋顶、金属和污垢五种材料,从而描绘了真实的光谱易变性。最后在所有数据集上加入高斯白噪声,得到 30 dB 的信噪比。数据集 DC2 中每个像素的光谱特征都包含端元依赖的

尺度缩放因子和复杂噪声引起的光谱易变性。具体来说,对于给定的 5 个参考端元,分别将这些光谱特征乘以 $[0.75, 1.25]$ 的随机缩放因子,然后在参考端元中加入 25 dB 高斯白噪声。接下来,按照 LMM 的方法,通过生成丰度图将它们进行混合,最后再次对这些混合像素加入一个 25 dB 的高斯白噪声。经过这个模拟过程之后,可以在不考虑缩放因子的情况下,使用一种高斯分布的特殊混合物来解释所产生的光谱变化。因此,这些具有这种光谱易变性的模拟数据将给我们提供一个适当的场景来验证所提出的方法。

5.3 结果及分析

表 1 详细说明了本文算法 LRC-SU 和其他对比算法相应的定量评价结果。从表 1 可以看出,数据集 DC1 中 FCLSU 的各项性能指标解混性能最差。而本

文算法 LRC-SU 各项性能指标明显优于其他对比算法,其中 ARMSE 指标中 LRC-SU 比次优算法 ALMM 下降了 0.6%,FAAE 指标中 LRC-SU 比次优算法 PLMM 下降了 33.8%,PSNR 指标中比 PLMM 提升了 3.32 dB,比次优算法 ELMM 提升了 1.51 dB。在数据集 DC2 中,本文算法 LRC-SU 在 FAAE 和 PSNR 指标的评估中依旧处于优势地位。在 ARMSE 指标中 LRC-SU 比 ELMM 性能略差一点,但在 FAAE 指标中,LRC-SU 比次优算法 ELMM 降低了 13.6%,PSNR 指标中,LRC-SU 比 ELMM 提升了 1.62dB。综上所述,本文 LRC-SU 与对比算法相比由于本文算法对于易变性矩阵和缩放因子拟合项的合理构建以及稀疏项的施加,使得对于丰度的估计更为准确。而且 LRC-SU 中低秩特性对于噪声的抑制使得在 PSNR 性能指标上优势大于其他竞争算法。

表 1 模拟数据的客观指标结果

Tab.1 Objective indicator results of simulated data

Methods		FCLSU	PLMM	ELMM	ALMM	LMM-SBD	MAC-U	本文算法
DC1	ARMSE	0.511	0.507	0.290	0.009	0.209	0.147	0.003
	FAAE	0.872	0.360	0.498	0.613	0.527	0.492	0.022
	PSNR/dB	68.819	78.342	80.152	65.332	58.439	77.042	81.662
DC2	ARMSE	0.350	0.357	0.003	0.061	0.412	0.027	0.005
	FAAE	0.596	0.774	0.219	0.933	0.824	0.468	0.083
	PSNR/dB	56.638	56.342	80.152	71.304	55.683	72.911	81.772

图 5 显示了数据集 DC1 在不同算法下的丰度图。对比所提供的真实的丰度图,FCLSU 由于没有考虑光谱变化以及噪声问题所得到的丰度图效果明显低于其他算法,表明其解混性能略差。PLMM 算法认为沥青、金属和污垢为混合物,识别不准确。ALMM 算法通过构造易变性库以及 MAC-SU 算法通过不断训练数据所得到的丰度图明显更接近真实丰度图,但在金属和污垢部分的识别存在误差。本文算法相对于其他算法后能够更为准确的识别五种端元,与真实丰度图更为接近。

图 6 显示了数据集 DC2 在不同算法下的丰度图。通过与真实数据集对比,FCLSU 由于没有考虑解混过程中的易变性问题,使得对于丰度的估计存在很大误差。由于 MAC-U 算法的无监督性质,该算法对于某些端元的识别并不准确,使得解混性能较差。对比真实丰度图,本文所提出的 LRC-SU 算法所得到的丰度图更接近真实情况,解混性能具有更

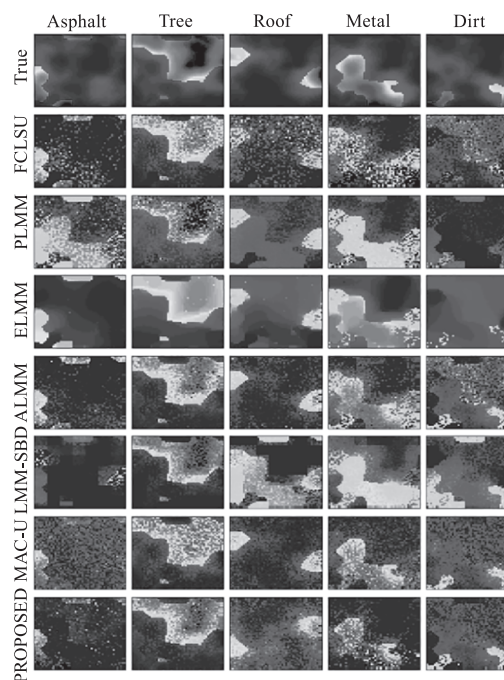


图 5 DC1 中不同方法的丰度图

Fig.5 Abundance maps of different methods in DC1

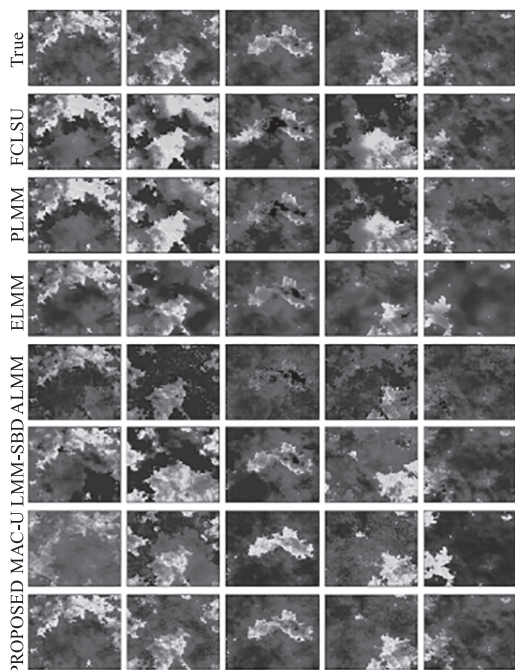


图 6 DC2 中不同方法的丰度图

Fig. 6 Abundance maps of different methods in DC2

大优势。图 7 是从两个模拟数据集中各选取一个端元所得到的丰度差异图。由图的可视化结果可以进一步看出, FCLSU 与真实丰度差异图相差最大, 说明它的解混性能最差。ALMM 以及 MAC-U 的丰度差异图更为接近真实结果。但本文所提出的算法相较于其他对比算法, 更接近真实的丰度差异图, 说明其对光谱易变性的考虑合理且有效, 能够得到更加精确的解混结果。

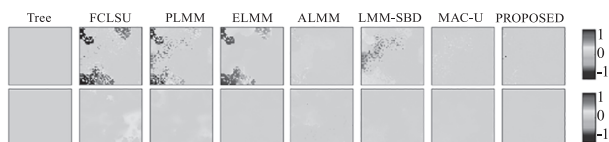


图 7 模拟数据下的丰度差异图

Fig. 7 Abundance difference maps of simulated data

6 真实数据实验

6.1 数据描述

Houston dataset: 本文用来评价光谱解混方法所使用的真是数据集是在 2012 年于美国德克萨斯州休斯顿大学的校区所获得的一个高光谱图像的子集。该图像用紧凑型机载光谱成像仪 (CASI) 收集, 包含在 380 ~ 1050 nm 区域的 144 个光谱波段。实验中所使用的高光谱图像的子集包含 105 × 128 张罗伯逊体育场的图像。图 8(a) 显示了观测场景的 RGB 高分辨率图像, 以助于区分不同结构。

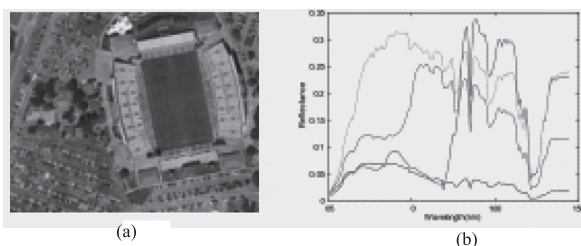


图 8 真实数据假彩及端元图

Fig. 8 Real data false color map and endmember map

6.2 实验设置

根据图 8(a), 该图像主要包含红色金属屋顶、植被、混凝土看台、沥青以及其他彩色结构等。通过使用 Hysime 算法^[26] 估计该数据集中内在维数为 17, 但考虑到本文所使用的所有算法, 大多数丰度映射都是非常稀疏的, 只有很少的空间结构。因此通过 VCA 选择的端元中, 我们确定了主要 4 类: 红色金属屋顶、沥青、植被以及混凝土看台。注意, 端元具有光谱变化, 每个端元可能存在不同的变化。例如, 红色金属屋顶有不同程度的光照, 植被端元包含多种树、草以及灌木丛, 但我们选择只考虑一种植被端元, 目的是突出算法对于光谱解混过程中对光谱易变性的处理能力。因此如图 8(b) 所示, 我们将使用一个包含 4 个主要端元 ($P = 4$), 105 × 128 × 144 的数据来展开实验。

6.3 结果及分析

表 2 详细说明了相应的定量评估结果, 从表中可以看到, 对于三个指标来说 FCLSU 的估计结果最差, 因为 FCLSU 算法没有考虑到光谱易变性以及抑制噪声的问题。而 LRC-SU 的性能都优于其他算法, 其中 ARMSE 和 PSNR 指标中 LRC-SU 分别优于次优算法 MAC-U 1.7%, 1.6 dB; 在 FFAE 指标中, LRC-SU 比 PLMM 下降了 15.8%。综上表明, LRC-SU 针对易变性建模精准, 同时考虑了丰度的稀疏性以及空间低相干性, 使得解混结果优于其他算法, 又通过施加对数低秩正则项, 消除了小分量噪声和误差, 使得还原图像质量的能力相较于其他算法具有更大的优势。

由于这些图像没有地面真实的丰度值, 因此我们针对此可视化结果进行了如下分析。图 9 显示了使用不同解混方法获得的 Houston datas 的丰度图。图中 FCLSU 算法整体的丰度分布遵循图像的视觉检查, 仅对于植被的识别良好, 对于红色金属屋顶以及混凝土看台 (由高分辨率 RGB 图像可知所有的看台确实是由相同的材料构成, 但是从高光谱数据的 RGB

表 2 真实数据的客观指标结果

Tab.2 Objective indicator results of real data

Methods	FCLSU	PLMM	ELMM	ALMM	LMM-SBD	MAC-U	本文算法
ARMSE	0.431	0.038	0.171	0.345	0.050	0.023	0.006
FAAE	0.864	0.198	0.250	0.622	0.763	0.433	0.040
PSNR/dB	56.623	62.795	63.549	65.343	58.439	71.181	72.784

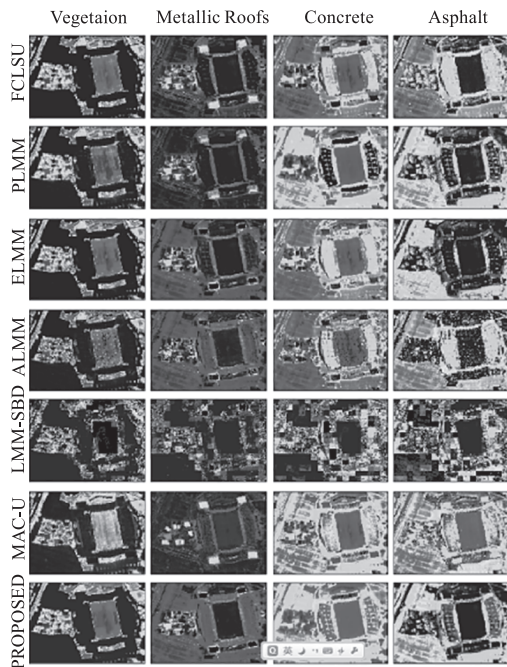


图 9 真实数据中不同方法的丰度图

Fig.9 Abundance maps of different methods in real data

组成中却看不出来)和沥青(道路和停车场)之间的区别识别的不明确。PLMM 算法对于沥青以及混凝土看台的识别相对较为清楚,但由于其扰动项的限制对于受光照影响的红色金属屋顶识别并不准确。由于 MAC-U 模型的非监督和非结构化性质,使得它将多个端元进行了合并,丰度图在视觉效果上不是很令人满意。图中本文算法通过合理构建缩放因子与易变性矩阵的拟合项,能够准确识别植被种类,能够借助缩放因子识别在光照影响下发生光谱变化的红色金属屋顶,也能够准确识别混凝土看台以及沥青部分,相对于其他方法具有更大的优势。这一结果也表明,该方法在解决光谱易变性问题上的有效性。

表 4 不同正则项在数据集上的 ARMSE 指标结果

Tab.4 ARMSE indicator results of different regularization terms in datasets

Regular terms	$F(M)$	$H(X)$	$J(V)$	$F(M) + H(X)$	$F(M) + J(V)$	$J(V) + H(X)$	$F(M) + J(V) + H(X)$
DC1	0.0058	0.0051	0.0059	0.0047	0.0035	0.0036	0.0028
DC2	0.0221	0.0057	0.0057	0.0370	0.0090	0.0213	0.0045
Houston	0.0920	0.0068	0.0104	0.0107	0.0035	0.0084	0.0057

表 3 核范数与对数和函数的指标结果

Tab.3 Indicator results of kernel norms and logarithmic sum function sum functions

正则项	$R(X)$	$H(X)$	$F(M) + J(V) + R(X)$	本文算法
DC1	0.0070	0.0051	0.0037	0.0028
DC2	0.0108	0.0057	0.0072	0.0045
Houston	0.0147	0.0068	0.0122	0.0057

7 消融实验

我们针对本文所提出的模型,通过分别单独考虑核范数 $R(X) = \beta \|X\|_*$,对数和函数 $H(X) = \beta \sum_i \log(\sigma_i(X) + \varepsilon)$ 正则项,以及在考虑 $F(M), J(V)$ 的基础上分别引入 $R(X), H(X)$,使用 ARMSE 指标来评价,验证两者对解混模型的影响。

由表 3 给出的指标结果可以看出,当模型引入对数和函数时得到的解混结果优于引入核范数时的结果,这表明对数和函数比起核范数更能突出奇异值的主要特征,减少噪声和干扰的影响,取得更加准确的解混结果。

为保证所提的算法具有最优性能,对算法中的正则项进行逐一验证,具体数据如表 4 所示。在 Houston 数据集中, $F(M)$ 和 $J(V)$ 正则项的组合获得性能最好,本文所提出的正则项组合次之。在数据集 DC1 和 DC2 中,本文所提出的正则项组合均获得最优的性能。综上所述,我们所提出的算法具有更大的优势。

8 运行时间

从运行时间对算法复杂性进行评估,表 5 列出了三个数据集上不同算法的运行时间。可以观察到 FCLSU 以及 LMM-SBD 由于模型没有充分考虑光谱易变性和噪声的影响,运行时间较短。本文算法在充分考虑易变性和噪声影响下所消耗的时间依旧少于 PLMM、ELMM 和 MAC-U,较为具有优势。

表5 三个数据集中不同算法的运行时间

Tab. 5 Running time of different algorithms in three datasets

Methods	FCLSU	PLMM	ELMM	ALMM	LMM-SBD	MAC-U	本文算法
DC1	0.814	767.025	22.270	6.917	4.135	56.666	18.216
DC2	6.883	62.750	457.213	117.058	4.605	3772	84.684
Houston	23.623	204.374	366.504	31.983	11.853	84.805	94.400

9 结论

考虑易变性问题,本文提出了一种基于低秩正交先验的光谱解混模型,通过引入缩放因子和易变性扰动矩阵的数据拟合项将光谱的类内和类间易变性合并为一个目标损失函数,并使该损失函数最小化来解决易变性问题。为了获得更准确和稳健的解混结果,我们加入了一个正交先验信息使端元字典与易变性扰动矩阵低相干,并对丰度矩阵施加对数和函数来增强它的低秩特性,起到抑制小分量噪声和干扰的作用。通过在合成数据及真实数据上进行性能评估,所提出的 LRC-SU 算法明显提高了解混的性能,优于现存的对比算法,具有良好的可行性。在未来的工作中,我们将重点关注光谱易变性方法的一下几个方面:一是进一步优化条件降低复杂度并提升运行速度;二是进一步探索易变性解混模型在深度学习领域的可行性。

参考文献:

- [1] Borsoi R A, Imbiriba T, Bermudez J C M. A data dependent multiscale model for hyperspectral unmixing with spectral variability[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2020, 29:3638-3651.
- [2] Li Fan, Wu Chaoming, Zhang Shaoquan, et al Deformed L1 regularization for sparse unmixing of hyperspectral images[J]. Laser & Infrared, 2021, 51(4):515-522. (in Chinese)
李璠,吴朝明,张绍泉,等. 变形 L1 正则化的高光谱图像稀疏解混[J]. 激光与红外, 2021, 51(4):515-522.
- [3] Borsoi R A, Imbiriba T, Bermudez J C M, et al. Spectral variability in hyperspectral data unmixing: a comprehensive review[J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Magazine, 2021, 9(4):223-270.
- [4] Shi S, Zhang L, Altmann Y, et al. Deep generative model for spatial-spectral unmixing with multiple endmember priors[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2022, 60:1-14.
- [5] Hong D, Gao L, Yao J, et al. Endmember-guided unmixing network(EGU-Net): a general deep learning framework for self-supervised hyperspectral unmixing [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2021, 33(11):6518-6531.
- [6] Schmidt M N, Winther O, Hansen L K. Bayesian non-negative matrix factorization [C]//Independent Component Analysis and Signal Separation: 8th International Conference, ICA 2009, Paraty, Brazil, March 15-18, 2009.
- [7] Arngren M, Schmidt M N, Larsen J. Unmixing of hyperspectral images using bayesian non-negative matrix factorization with volume prior[J]. Journal of Signal Processing Systems, 2011, 65:479-496.
- [8] Fang Y, Wang Y, Xu L, et al. BCUN: bayesian fully convolutional neural network for hyperspectral spectral unmixing[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2022, 60:1-14.
- [9] Zare A, Ho K C. Endmember variability in hyperspectral analysis: addressing spectral variability during spectral unmixing[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2013, 31(1):95-104.
- [10] Ghaffari O, ValadanZoej M J, Mokhtarzade M. Reducing the effect of the endmembers' spectral variability by selecting the optimal spectral bands [J]. Remote Sensing, 2017, 9(9):884.
- [11] Thouvenin P A, Dobigeon N, Tourneret J Y. Hyperspectral unmixing with spectral variability using a perturbed linear mixing model[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 64(2):525-538.
- [12] Drumetz L, Veganzones M A, Henrot S, et al. Blind hyperspectral unmixing using an extended linear mixing model to address spectral variability[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2016, 25(8):3890-3905.
- [13] Hong D, Yokoya N, Chanussot J, et al. An augmented linear mixing model to address spectral variability for hyperspectral unmixing[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2018, 28(4):1923-1938.
- [14] Zhang G, Mei S, Xie B, et al. Spectral variability augmented sparse unmixing of hyperspectral images [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2022, 60:1-13.
- [15] Imbiriba T, Borsoi R A, Bermudez J C M. Generalized linear mixing model accounting for endmember variability [C]//2018 IEEE International Conference on Acoustics,

- Speech and Signal Processing (ICASSP). IEEE, 2018: 1862 – 1866.
- [16] Hu Z, Nie F, Wang R, et al. Low rank regularization: a review [J]. *Neural Networks*, 2021, 136: 218 – 232.
- [17] Yang Feixia. Research on feature extraction and fusion methods for remote sensing images [D]. Beijing: Beijing University of Posts and Telecommunications, 2020. (in Chinese) 杨飞霞. 遥感图像特征提取与融合方法的研究 [D]. 北京: 北京邮电大学, 2020.
- [18] Chi C Y, Li W C, Lin C H. Convex optimization for signal processing and communications: from fundamentals to applications [M]. CRC Press, 2017.
- [19] Ma F, Huo S, Yang F. Graph-based logarithmic low-rank tensor decomposition for the fusion of remotely sensed images [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 2021, 14: 11271 – 11286.
- [20] Azar S G, Meshgini S, Beheshti S, et al. Linear mixing model with scaled bundle dictionary for hyperspectral unmixing with spectral variability [J]. *Signal Processing*, 2021, 188: 108214.
- [21] Li H, Borsoi R A, Imbiriba T, et al. Model-based deep autoencoder networks for nonlinear hyperspectral unmixing [J]. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 2021, 19: 1 – 5.
- [22] Chan T H, Chi C Y, Huang Y M, et al. A convex analysis-based minimum-volume enclosing simplex algorithm for hyperspectral unmixing [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(11): 4418 – 4432.
- [23] Borsoi R A, Imbiriba T, Bermudez J C M. Deep generative endmember modeling: an application to unsupervised spectral unmixing [J]. *IEEE Transactions on Computational Imaging*, 2019, 6: 374 – 384.
- [24] Clark R N, Swayze G A, Livo K E, et al. Imaging spectroscopy: Earth and planetary remote sensing with the USGS Tetracorder and expert systems [J]. *Journal of Geophysical Research: Planets*, 2003, 108(E12).
- [25] Hong D, Zhu X X. SULoRA: subspace unmixing with low-rank attribute embedding for hyperspectral data analysis [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2018, 12(6): 1351 – 1363.
- [26] Bioucas-Dias J M, Nascimento J M P. Hyperspectral subspace identification [J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2008, 46(8): 2435 – 2445.