

## 基于对数低秩与可分离总变分的高光谱解混

杨飞霞<sup>1</sup>, 李正<sup>1</sup>, 董贤达<sup>1</sup>, 马飞<sup>2</sup>

(1. 辽宁工程技术大学 电气与控制工程学院, 辽宁 葫芦岛 125105; 2. 辽宁工程技术大学 电子与信息工程学院, 辽宁 葫芦岛 125105)

**摘要:** 高光谱解混旨在从盲源分离场景中识别出物质(端元)光谱特征和空间分布(丰度)特征。针对高光谱图像中存在大量混合像元降低解混的精度,以及当高光谱数据受到噪声污染时难以估计端元的准确数目等问题,本文提出一种将对数函数的局部相似性对基于核范数的低秩表达式进行松弛,抑制次要分量;然后将各向异性总变分重新定义为可分离表达式,以平滑光谱特征和空间丰度特征;最后设计一组高效的求解器得到闭式解。实验结果表明,所提出的解混模型能有效地提升解混精度的同时也能抑制噪声,验证了该模型的有效性。

**关键词:** 高光谱;解混;对数低秩;可分离总变分

**中图分类号:** TP751.1;O433 **文献标识码:** A **DOI:** 10.3969/j.issn.1001-5078.2025.04.022

## Approximate pure logarithmic low-rank and separable total variation regularization for hyperspectral unmixing

YANG Fei-xia<sup>1</sup>, LI Zheng<sup>1</sup>, DONG Xian-da<sup>1</sup>, MA Fei<sup>2</sup>

(1. School of Electrical and Control Engineering, Liaoning Technical University, Huludao 125105, China;

2. School of Electronic and Information Engineering, Liaoning Technical University, Huludao 125105, China)

**Abstract:** Hyperspectral unmixing aims to identify the spectral characteristics of substances (endmembers) and spatial distribution (abundance) features of substances (end-elements) from a blind source separation scenario. To address the challenges posed by a large number of mixed pixels in hyperspectral images, which can reduce unmixing accuracy, and the difficulty in accurately estimating the number of endmembers when hyperspectral data is contaminated with noise, a hyperspectral unmixing model that combines low-rank relaxation and separable total variation prior information is proposed in this paper. Firstly, the local similarity of the logarithmic function is utilized to relax the nuclear norm-based low-rank expression, thereby suppressing minor components. Then, the anisotropic total variation is redefined as a separable expression to smooth the spectral characteristics and spatial abundance features. Finally, a set of efficient solvers is designed to obtain a closed-form solution. The experimental results show that the proposed unmixing model can effectively improve the unmixing accuracy while suppressing the noise, which verifies the effectiveness of the model.

**Keywords:** hyperspectral; unmixing; logarithmic low rank; separable total variation

**基金项目:** 辽宁省科技厅自然科学基金计划面上项目 (No. 2023-MS-314); 辽宁省教育厅基本科研创新发展项目 (No. LJ242410147006) 资助。

**作者简介:** 杨飞霞 (1979 -), 女, 博士, 副教授, 现主要从事模式识别与智能系统、智能电网理论与技术的研究。E-mail: 17962072@qq.com

**通讯作者:** 李正 (1998 -), 男, 硕士研究生, 研究方向为遥感图像处理。E-mail: 1595587774@qq.com

**收稿日期:** 2024-07-01

## 1 引言

高光谱图像因其包含丰富的空间和光谱信息能够精确识别地表物质特征。因此,在植被覆盖率、图像分类、异常目标检测等领域有广泛的应用。由于受成像传感器的限制,高光谱图像中存在大量混合像元。解混的目的是准确提取混合像元中所含端元及其所占比例。线性混合模型<sup>[1]</sup> (Linear Mixing Model, LMM) 因其通用性强,在解混算法中应用广泛。

基于线性混合模型的解混算法可以分为四类:凸几何、稀疏回归、基于深度学习和基于统计的方法。常用的凸几何方法包括顶点分量分析<sup>[2]</sup>和单纯形生长算法<sup>[3]</sup>,凸几何算法需要假设端元是数据集最小体积单纯形的顶点,这导致提取端元特征的精度受限。

稀疏解混由于不需纯像元假设并且不需要估计端元的数量而广泛应用在解混模型中。如 LI<sup>[4]</sup>利用低秩约束和全变分正则提出超像素分割的稀疏解混算法; QI<sup>[5]</sup>通过光谱分割利用光谱和空间信息,提出光谱-空间加权多视角合作稀疏解混模型; LI<sup>[6]</sup>等人考虑高光谱所有波段的不同高斯噪声强度和不同类型的噪声提出带状稀疏解混模型。这些算法虽然取得了较好的解混效果,但缺点是不能描述字典外的新物质或受阴影影响的物质,且计算复杂度较高。

由于深度学习具有较强的学习能力,许多研究者致力于利用自编码器进行高光谱解混,以获得更好的解混效果。例如, SU 等人<sup>[7]</sup>提出了一种基于深度自编码器网络的无监督解混新技术。 PALSSON 等人<sup>[8]</sup>提出了一种新的光谱-空间线性混合模型和一种基于卷积神经网络自编码器解混的相关估计方法。虽然这些方法获得了不错的解混效果,但其训练过程非常耗时,且深度学习模型受训练样本和网络参数影响较大,若训练样本不够充足则性能会出现偏差导致解混精度变差。

基于统计算法比较常用的是非负矩阵分解 (Non-negative Matrix Factorization, NMF)。NMF 由于同时提取端元特征和丰度特征适合用于高光谱解混。 MA 等人<sup>[9]</sup>提出一种增强型的光谱解混模型,通过引入缩放因子和光谱易变性扰动矩阵来解决光谱类内和类间的畸变,同时引入正交先验

实现原光谱字典与易变性项的空间低相干性。 LV<sup>[10]</sup>等人提出了一种基于聚类加权 NMF 的高光谱图像解混方法,利用聚类结果构建权重矩阵,并将其引入标准 NMF 模型中,以减少不均衡样本对解混过程的不利影响。 LI<sup>[11]</sup>等人将子空间聚类嵌入稀疏 NMF 模型中,学习丰度、端元相似性矩阵,并在模型中构建自表达正则化器和平滑矩阵来提高解混性能。上述方法虽然取得不了错的解混性能,但是忽略了高光谱图像的局部区域由于像元光谱之间的相关性,相应的丰度矩阵具有局部低秩特性,也没有考虑受到噪声影响时导致解混精度下降。

基于现有模型的优点和不足,本文提出了一种基于对数低秩松弛和可分离总变分正则化的高光谱解混新方法。该模型首先在矩阵观测模型的基础上,通过对丰度矩阵引入对数和函数来增强低秩特性,抑制小分量和去除冗余信息;其次,基于端元曲线的渐进式变化特征,采用可分离总变分法对谱因子矩阵和丰度矩阵分别施加垂直和水平方向的平滑约束,促进光谱和空间特征的分段平滑以抑制噪声;最后,采用交替方向乘法 (Alternating Direction Method of Multipliers, ADMM) 对算法进行精确求解。

## 2 线性模型

线性混合模型侧重于宏观角度对光的单次反射进行研究,而不考虑物质之间光的相互作用。这个模型假设每个像元可以被表示为图像中所有潜在光谱特征的线性组合,也就是说,它认为每个像元的光谱特征是所有光谱特征的线性叠加:  $y = Ax + e$ , 其中  $y$  是在混合像元中具有  $M$  个波段的矢量;  $A \in \mathbb{R}^{L \times M}$  是具有  $N$  个端元的端元矩阵;  $x \in \mathbb{R}^N$  表示丰度向量;  $e \in \mathbb{R}^M$  是噪声。端元矩阵描述了不同物质对光的反射率,因此端元矩阵是非负的。丰度向量需要满足非负约束以及和为一约束(即  $\sum_{i=1}^N x_i = 1$ )。假设高光谱图像包含  $L$  个像元,可以将  $y$  写为矩阵形式  $Y = [y_1, \dots, y_L]$ , 即:

$$Y = AX + E \quad (1)$$

其中,  $X = [x_1, \dots, x_L]$  是丰度矩阵,  $E = [e_1, \dots, e_L]$  表示噪声矩阵。在误差最小的准则下,高光谱解混的原始优化模型可以定义为:

$$\min_{A, X} \frac{1}{2} \|Y - AX\|_F^2 \quad \text{s. t. } A \geq 0, X \geq 0, 1_N^T X = 1_L^T \quad (2)$$

其中目标函数是数据拟合项。由于公式是个病态逆的问题,其解不唯一,因此需要对端元或者丰度矩阵施加约束来缩小解的范围使闭式解唯一。

### 3 优化问题的定义和正则化

由于高光谱图像在空间和光谱领域存在局部相似性,因此在面临噪声干扰的情况下,这些图像通常包含大量冗余信息。因此,本文采用了对数低秩正则化和总变分正则化,对原始优化模型进行了改进,重新构建了一种新的基于优化的解混模型,以实现抑制冗余信息和平滑去噪处理。所提出的模型为:

$$\min_{A, X} \frac{1}{2} \|Y - AX\|_F^2 + \lambda_a \Phi_a(A) + \lambda_h \Phi_h(X) + \lambda_v \Phi_v(X) + \lambda_l \Phi_l(X) \quad (3)$$

s. t.  $A \geq 0, X \geq 0$

式中,  $\Phi_a(A)$  表示端元特征的平滑正则化;  $\Phi_h(X)$  和  $\Phi_v(X)$  分别表示空间丰度的水平和垂直平滑正则化;  $\Phi_l(X)$  为丰度矩阵的低秩正则化;  $\lambda_a, \lambda_h, \lambda_v$  和  $\lambda_l$  是相应的权值。

#### 3.1 低秩正则化

由于在空间的子空间中存在强相关性,因此对丰度矩阵施加了低秩正则化。矩阵的秩等于正奇异值的数量,但秩是一个非凸函数。而核范数通常被用作低秩逼近的凸替代方法。矩阵的核范数定义为奇异值之和,即:

$$\|X\|_* = \sum_{i=1}^r \sigma_i(X) \quad (4)$$

其中,  $\sigma_i(X)$  表示  $X$  的第  $i$  个奇异值;  $r$  表示  $X$  的秩。较大的奇异值通常包含主要的结构成分,而较小的奇异值主要包括噪声或其他干扰成分。由公式知,核范数平等惩罚每一个奇异值会导致表征主要结构信息的较大奇异值惩罚较大而导致误差较大,根据文献[12]中知,对数和函数可以加强矩阵的低秩属性,因此采用对数和函数来松弛低秩性质。根据文献[13]~[14]知,对数和函数表达式为:

$$\text{LogRank}(X) = \sum_i \log(\sigma_i(X) + \varepsilon) \quad (5)$$

其中,  $\varepsilon$  是一个小的正数,以避免 0 的情况。

对于低秩恢复问题定义为:

$$\min_M \frac{1}{2} \|\Gamma - M\|_F^2 + \alpha \sum_i \log(\sigma_i(M) + \varepsilon) \quad (6)$$

其中,  $\Gamma$  表示观测矩阵,公式的最优解为:

$$M = U \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n) V \quad (7)$$

根据文献[15]对于闭式解的定义:

$$d_i = D_{\alpha, \varepsilon}(\sigma_i)$$

$$D_{\alpha, \varepsilon}(x) = \begin{cases} 0, & c_2 \leq 0 \\ \frac{c_1 + \sqrt{c_2}}{2}, & c_2 > 0 \end{cases}$$

其中:

$$c_1 = |x| - \varepsilon, c_2 = c_1^2 - 4(\alpha - \varepsilon|x|)$$

$$0 < \varepsilon < \min(\sqrt{\alpha}, (\alpha/\sigma_1))$$

通过最优解的构成知,对数和函数能够通过去掉较小的奇异值来抑制噪声,且能够缩小矩阵秩来保留结构信息<sup>[16]</sup>。

#### 3.2 空间平滑正则化

高光谱图像中的水平和垂直像元由于相邻像元之间的逐渐变化而具有平滑性。为了分别平滑丰度特征,采用了各向异性总变分。其基本表达式为:

$\Phi(X) = \sum_{p, q \in \varepsilon} \|x_p - x_q\|_1$ 。其中,  $\varepsilon$  表示图像的水平

和垂直分量中的相邻像素。其中,丰度特征的水平差分矩阵用  $\hat{D}_v = (I_{\sqrt{L}} \otimes \bar{D}_v)^T$  来表示,其中:

$$\bar{D}_v(i, j) = \begin{cases} -1, & j = i \\ 1, & j = i + 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

表示一阶差分矩阵;丰度特征的垂直差分矩阵的表达式为  $\hat{D}_h = (\bar{D}_h^T \otimes I_{\sqrt{L}})^T$ 。丰度矩阵在水平和垂直方向上的光滑正则化可以由下式给出:

$$\begin{cases} \Phi_h(X) = \|X\hat{D}_v\|_1 \\ \Phi_v(X) = \|X\hat{D}_h\|_1 \end{cases} \quad (8)$$

其中,  $\Phi_h(X)$  表示丰度矩阵在水平方向的正则化;  $\Phi_v(X)$  表示在垂直方向的正则化。

#### 3.3 光谱平滑正则化

端元特征曲线代表了物质在不同光谱下的反射率。理论上,这些曲线通常因渐变特征而呈现出逐渐趋于平滑的趋势。然而,当受到噪声干扰时,曲线会迅速呈现出较大的波动。因此,采用总变分来沿垂直方向平滑端元特征的曲线,其基本表达式为:

$\Phi(A) = \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{\tau, p, q \\ \exists \gamma}} |a_j(p) - a_j(q)|_1$ , 其中,  $\gamma$  表示端元矩阵中相邻列的集合,  $a_j(p)$  表示第  $j$  个端元的第  $p$  个元素。其矩阵形式可表示为:

$$\Phi_a(A) = \|D_a A\|_1 \quad (9)$$

#### 4 提出的算法

通过结合对数低秩松弛和总变分正则化重新形成了一种用于高光谱解混的盲解混合方法 ( $L^2RSTV$ ), 定义为:

$$\begin{aligned} \min_{A, X} \quad & \frac{1}{2} \|Y - AX\|_F^2 + \lambda_a \|D_a A\|_1 + \lambda_v \|X\hat{D}_v\|_1 + \\ & \lambda_h \|X\hat{D}_h\|_1 + \lambda_1 \text{LogRank}(X) \\ \text{s. t. } \quad & A \geq 0, X \geq 0 \end{aligned} \quad (10)$$

因为  $A$  和  $X$  都是未知的, 式(10)是非凸的。使用交替优化 (Alternating Optimization, AO), 它被分解为两个关于  $X$  和  $A$  的凸子问题, 分别是:

$$\begin{cases} X^{k+1} = \arg \min_{X \geq 0} \frac{1}{2} \|Y - AX\|_F^2 + \lambda_v \|X\hat{D}_v\|_1 + \\ \quad \lambda_h \|X\hat{D}_h\|_1 + \lambda_1 \text{LogRank}(X) \\ A^{k+1} = \arg \min_{A \geq 0} \frac{1}{2} \|Y - AX\|_F^2 + \lambda_a \|D_a A\|_1 \end{cases} \quad (11)$$

其中,  $k$  是 AO 的外部迭代次数。由于  $X$  在  $A$  之前进行估计, 因此可以通过顶点成分分析算法确定端元矩阵  $A$  的初始值。然后, 采用 ADMM 来分别解决关于  $X$  和  $A$  的两个子问题。

##### 4.1 求解丰度矩阵

为了便于计算, 通过  $X$  添加约束条件来进行变量分离。求解  $X$  的子问题可以重新构造为:

$$\begin{aligned} \min_{X, U, Z, V_i} \quad & \frac{1}{2} \|Y - AX\|_F^2 + \lambda_v \|V_1\|_1 + \lambda_h \|V_2\|_1 + \\ & \lambda_1 \text{LogRank}(V_3) + I_+(V_4) \\ \text{s. t. } \quad & X = U, V_1 = U\hat{D}_v, X = Z, V_2 = Z\hat{D}_h, \\ & X = V_3, X = V_4 \end{aligned} \quad (12)$$

其中,  $I_+(V_4)$  是示性函数。需要强调的是, 等式约束  $X = U$  和  $X = Z$  旨在分离水平和垂直差分矩阵的计算。否则, 当图像大小相对较大时总变分的计算会非常耗时。然后, 通过增广拉格朗日函数来表示为:

$$\begin{aligned} L(X, U, Z, V_1, V_2, V_3, V_4, H_i) = & \frac{1}{2} \|Y - AX\|_F^2 + \\ & \lambda_v \|V_1\|_1 + \lambda_h \|V_2\|_1 + I_+(V_4) + \lambda_1 \text{LogRank}(V_3) + \\ & H_1^T(X - U) + \frac{\mu}{2} \|X - U\|_F^2 + H_2^T(V_1 - U\hat{D}_v) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{2} \|V_1 - U\hat{D}_v\|_F^2 + H_3^T(X - Z) + \frac{\mu}{2} \|X - Z\|_F^2 + \\ & H_4^T(V_2 - Z\hat{D}_h) + \frac{\mu}{2} \|V_2 - Z\hat{D}_h\|_F^2 + H_5^T(X - V_3) + \\ & \frac{\mu}{2} \|X - V_3\|_F^2 + H_6^T(X - V_4) + \frac{\mu}{2} \|X - V_4\|_F^2 \end{aligned} \quad (13)$$

其中,  $H_i$  是对偶变量, 而  $\mu$  是增广拉格朗日系数。每个变量的闭式解如下所示:

$$\begin{aligned} X^{k+1} = & (A^T A + 4\mu I)^{-1} [A^T Y + \mu(U^k + Z^k + V_3^k + V_4^k) \\ & - H_1^k - H_3^k - H_5^k - H_6^k] \end{aligned} \quad (14)$$

$$U^{k+1} = \left[ X^k + \frac{H_1^k}{\mu} + (V_1^k + \frac{H_2^k}{\mu}) \hat{D}_v^T \right] (\hat{D}_v \hat{D}_v^T + I)^{-1} \quad (15)$$

$$V_1^{k+1} = \text{shrink}(U^k \hat{D}_v - \frac{H_2^k}{\mu}, \frac{\lambda_v}{\mu}) \quad (16)$$

$$Z^{k+1} = \left[ X^k + \frac{H_3^k}{\mu} + (V_2^k + \frac{H_4^k}{\mu}) \hat{D}_h^T \right] (\hat{D}_h \hat{D}_h^T + I)^{-1} \quad (17)$$

$$V_2^{k+1} = \text{shrink}(Z^k \hat{D}_h - \frac{H_4^k}{\mu}, \frac{\lambda_h}{\mu}) \quad (18)$$

$$V_3^{k+1} = P \text{diag}[Q_{\beta, \epsilon}^k(\sigma_1), \dots, Q_{\beta, \epsilon}^k(\sigma_n)] Q^T \quad (19)$$

$$V_4^{k+1} = \left[ X^k + \frac{H_6^k}{\mu}, 0 \right]_+ \quad (20)$$

$$H_1^{k+1} = H_1^k + \mu(X^{k+1} - U^{k+1}) \quad (21)$$

$$H_2^{k+1} = H_2^k + \mu(V_1^{k+1} - U^{k+1} \hat{D}_v) \quad (22)$$

$$H_3^{k+1} = H_3^k + \mu(X^{k+1} - Z^{k+1}) \quad (23)$$

$$H_4^{k+1} = H_4^k + \mu(V_2^{k+1} - Z^{k+1} \hat{D}_h) \quad (24)$$

$$H_5^{k+1} = H_5^k + \mu(X^{k+1} - V_3^{k+1}) \quad (25)$$

$$H_6^{k+1} = H_6^k + \mu(X^{k+1} - V_4^{k+1}) \quad (26)$$

其中,  $V_3^{k+1}$  按照公式(7)更新, 对于原始和对偶变量的闭式解交替迭代直到收敛。

##### 4.2 求解端元矩阵

端元矩阵的求解过程与丰度特征类似。通过使用 ADMM, 目标函数中的变量分离也是通过添加等式约束来实现的。优化模型如下所示:

$$\begin{aligned} \min_{A, B, C, W} \quad & \frac{1}{2} \|Y - AX\|_F^2 + \lambda_a \|W\|_1 + I_+(C) \\ \text{s. t. } \quad & A = B, W = D_a B, A = C \end{aligned} \quad (27)$$

其增广拉格朗日函数为:

$$\begin{aligned} L(A, B, C, W, F_i) = & \frac{1}{2} \|Y - AX\|_F^2 + \lambda_a \|W\|_1 + \\ & I_+(C) + F_1^T(A - B) + \frac{\rho}{2} \|A - B\|_F^2 + F_2^T(W - D_a B) \end{aligned}$$

$$+ \frac{\rho}{2} \|W - D_a B\|_F^2 + F_3^T(A - C) + \frac{\rho}{2} \|A - C\|_F^2 \quad (28)$$

其中,  $F_i$  是对偶变量;  $\rho$  是增广拉格朗日系数。各变量的闭式解如下:

$$A^{k+1} = (YX^T + \rho B^k + \rho C^k - F_1^k - F_3^k) (XX^T + 2\rho I)^{-1} \quad (29)$$

$$B^{k+1} = (D_a^T D_a + I)^{-1} \left[ D_a^T \left( W^k + \frac{F_2^k}{\rho} \right) + \frac{F_1^k}{\rho} + A^k \right] \quad (30)$$

$$C^{k+1} = \left[ A^{k+1} + \frac{F_3^k}{\rho}, 0 \right]_+ \quad (31)$$

$$W^{k+1} = \text{shrink} \left( D_a B^{k+1} - \frac{F_2^k}{\rho}, \frac{\lambda_a}{\rho} \right) \quad (32)$$

$$F_1^{k+1} = F_1^k + \rho (A^{k+1} - B^{k+1}) \quad (33)$$

$$F_2^{k+1} = F_2^k + \rho (W^{k+1} - D_a B^{k+1}) \quad (34)$$

$$F_3^{k+1} = F_3^k + \rho (A^{k+1} - C^{k+1}) \quad (35)$$

## 5 实验仿真及性能分析

本节使用两个合成数据集和一个真实数据集来验证本文算法的有效性。采用了六种最先进的解混方法,包括稀疏增强卷积分解<sup>[17]</sup> (Sparsity - Enhanced Convolutional Decomposition, SeCoDe)、最小体积约束非负矩阵分解<sup>[18]</sup> (Minimum Volume Constrained Nonnegative Matrix Factorization, MVCNMF)、快速最小体积单纯性法<sup>[19]</sup> (Fast Minimum Volume Simplex Analysis, FMVSA)、SISAL<sup>[20]</sup>、增强线性混合模型<sup>[21]</sup> (Augmented Linear Mixing Model, ALMM) 和自编码网络顶点分量分析<sup>[22]</sup> (AutoEncoder Network-Vertex Component Analysis, EndNet - VCA) 作为性能比较的对比算法。此外,利用光谱角  $\Omega_a$ 、丰度角  $\Omega_s$  和重构信噪比 RSNR 来评估算法的性能。

### 5.1 数据集

真实数据是由 VIRIS 传感器收集的高光谱图像,涵盖了美国内华达州的 Cuprite 地区,并广泛用于高光谱解混或特征提取的实验中。该传感器具有 224 个光谱波段,覆盖从 400 ~ 2500 nm 的波长范围,光谱分辨率为 10 nm。受大气吸收和干扰影响的波段已被移除,最终使用的数据保留了 5 ~ 106、115 ~ 151、171 ~ 214 和波段,共 183 个波段,图像大小为  $L = 150 \times 150$  像素。实际场景如图 1 所示。在另外两组数据中,使用了美国地质调查局 (USGS) 数据库中的高光谱图像,并选择 Jarsoite、Pyrope、Dumortierite、Buddingtonite、Muscovite 和 Goethite 六种

物质作为端元,生成像元大小分别为  $L = 100 \times 100$  和  $L = 130 \times 130$  且具有 224 个光谱波段的数据。其丰度分布图 2 和图 3 所示。合成数据 Data I 模拟了实际物质分布,合成数据集 Data II 采用了正则分布形式。从图中可以看出,这六个端元呈稀疏分布。

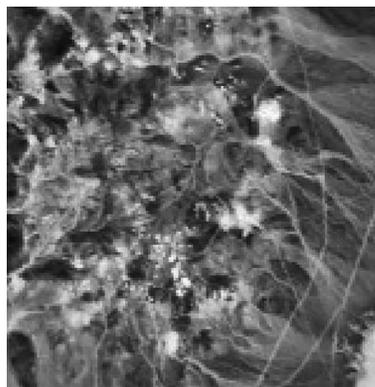


图 1 真实数据场景图

Fig. 1 Real data scene diagram

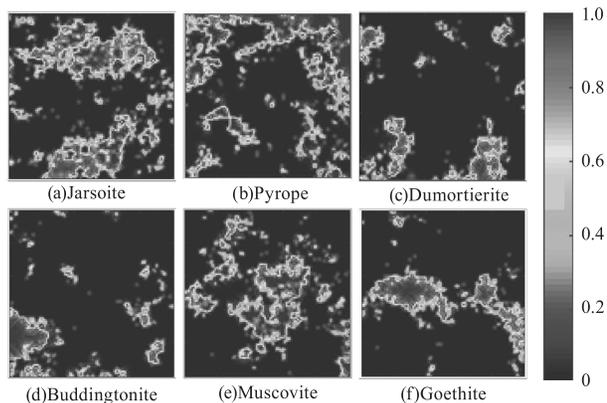


图 2 Data I ( $L = 100 \times 100$ ) 中每个端元的真实丰度

Fig. 2 The true abundance of each end element

in the Data I ( $L = 100 \times 100$ )

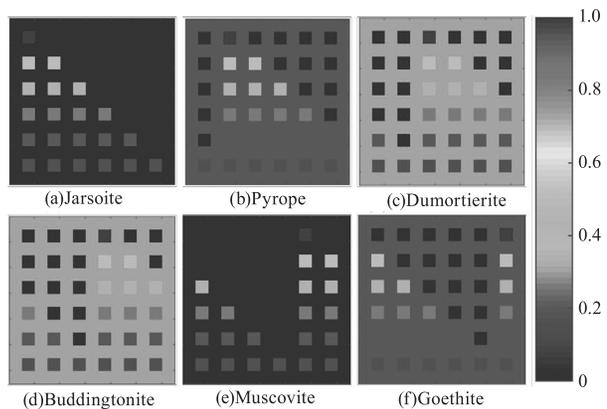


图 3 合成 Data II ( $L = 130 \times 130$ )

中每个端元的真实丰度

Fig. 3 The true abundance of each end element in the

synthesized Data II ( $L = 130 \times 130$ )

### 5.2 参数设置

本文所提出的解混模型包括数据拟合和正则化项,其中系数被设置为加权相应的关系。一般来说,权重值与噪声信噪比(Signal-to-Noise Ratio, SNR)水平相关。性能与系数  $\lambda_a$ 、 $\lambda_h$ 、 $\lambda_v$  和  $\lambda_l$  之间的关系曲线如图 4 所示。

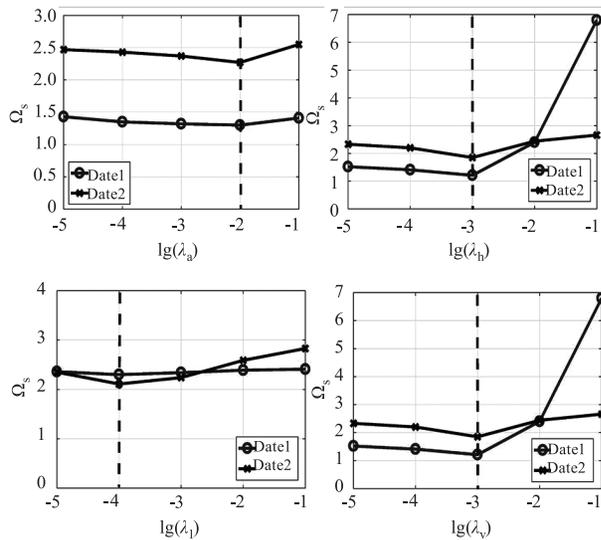


图 4 两个数据集的丰度偏差角相对于正则化参数的曲线

Fig. 4 Curves of the abundance deviation angle relative to the regularized parameters for the two datasets

在测量一个权重时,其他权重被固定。例如,在测试  $\lambda_a$  时,  $\lambda_h$ 、 $\lambda_v$  和  $\lambda_l$  被设置为 0.001。作为丰度矩阵上水平和垂直总变分的权重,  $\lambda_h$  和  $\lambda_v$  被设置为相等,即  $\lambda_v = \lambda_h$ 。从图中可以看出,当  $\lg(\lambda_a) = -2$  时在两个数据集上的丰度角均能取得最小值,故将  $\lambda_a$  设置成 0.01;同理,  $\lambda_v = \lambda_h = 0.001$ ,

$\lambda_l = 0.0001$ 。此外,为了测试去噪性能,分别将 SNR 设置为 20 dB、25 dB、30 dB、35 dB 和 40 dB,以模拟不同的噪声环境。所提出方法中的收敛规则要求连续迭代之间的目标函数的相对差异小于 0.001<sup>[23]</sup>,即:

$$\frac{F(A^{k+1}, X^{k+1}) - F(A^k, X^k)}{F(A^k, X^k)} \leq 0.001 \quad (36)$$

在实际应用中,因为存在内循环,对整体性能影响很小,所以两种基于 ADMM 的算法不需要完全运行。

### 5.3 实验结果及性能分析

#### 5.3.1 合成数据集的性能分析

以 Muscovite 端元为例,不同噪声环境下各种算法的丰度估计性能如图 5 和图 6 所示。由图可以看出所加噪声为 20 dB 时所有的丰度图中出现阴影,说明均受到噪声的干扰,显 EndNet-VCA 和 FMVSA 受到噪声的影响更大,导致丰度误差比较大;ALMM 算法和本文所提算法丰度估计相较于其他算法更好,但从视觉角度来看,所提算法丰度角更小更接近参考图像;但当噪声为 30 dB 时,图像变得清晰,说明解混精度在提升,本文提出的算法在在所选两个数据集上有更好的清晰度,即所提算法展现出更好的解混精度。当 SNR 达到 40 dB 时各种算法无法从视觉上判断出优劣。从视觉效果可知所提算法在各组噪声下更接近参考图像,这是因为本文所提算法中的对数低秩松弛能通过抑制噪声或其他干扰来提升解混的性能。

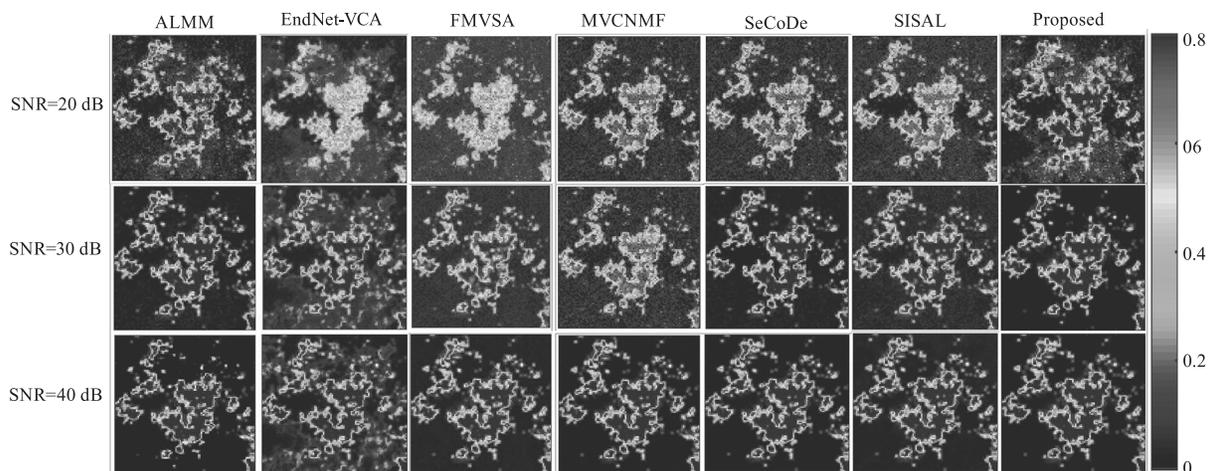


图 5 合成 Data 1 各算法的丰度估计图

Fig. 5 Abundance estimation maps for each algorithm of synthetic Data 1

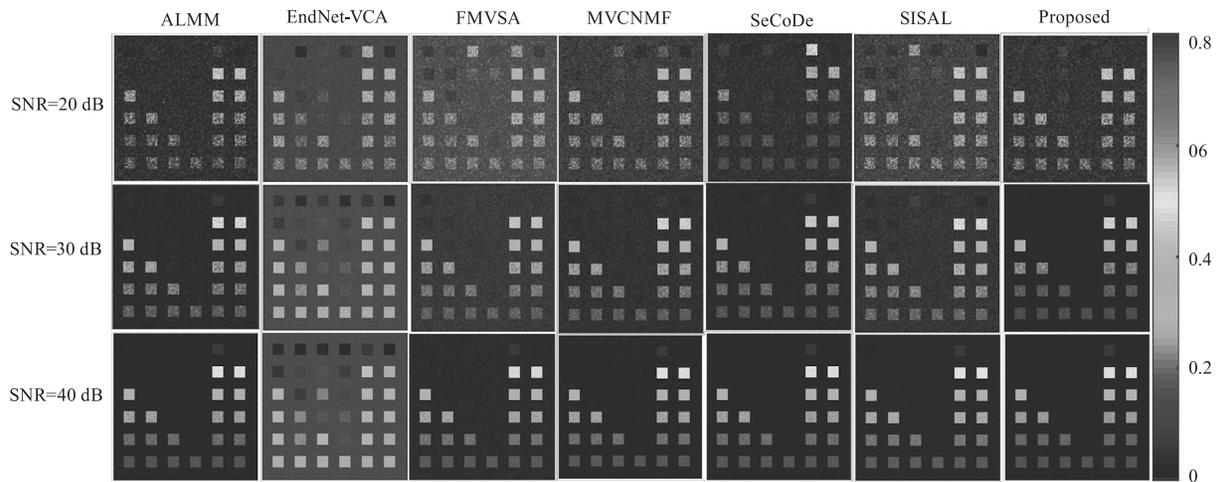


图6 合成的 Data II 各算法的丰度估计图

Fig. 6 Abundance estimation maps for each algorithm of synthetic Data II

表1和表2是每种算法的端元光谱角度和丰度角度误差。从角度误差随噪声的变化来看两个合成数据集的角度误差随着噪声的增加而减小。从数据可以看出本文提出得算法  $L^2RSTV$  在随噪声变化时优势明显。所加噪声为40 dB 时与次优算法相比,在裁剪区域为  $130 \times 130$  上时光谱角  $\Omega_a$  分别降低 23.33 %、5.19 %、4.65 %、45.4 % 和 6.67 % ,丰度角  $\Omega_s$  分别

降低 6.38 %、14.03 %、47.49 %、11.76 和 34.13 % ;在裁剪区域为  $100 \times 100$  时,光谱角  $\Omega_a$  分别降低 28.23 %、35.71 %、75.68 %、105.88 % 和 127.27 % ,丰度角  $\Omega_s$  降低 7.3 %、2.02 %、4.00 %、14.80 % 和 3.08 % ,即所提算法在模拟实际物质分布时能够有效地降低光谱角和丰度角;在模拟正则分布形式时,能显著降低光谱角,能在一定程度上降低丰度角。

表1  $130 \times 130$  数据集上的性能比较

Tab. 1 Performance comparison on  $130 \times 130$  data sets

性能指标 Regularization	$\Omega_a / (^\circ)$					$\Omega_s / (^\circ)$				
	20 (dB)	25 (dB)	30 (dB)	35 (dB)	40 (dB)	20 (dB)	25 (dB)	30 (dB)	35 (dB)	40 (dB)
FMVSA	6.83	4.20	2.61	1.51	1.02	30.29	23.15	16.32	9.78	6.33
EndNet-VCA	1.85	0.81	0.45	0.32	0.16	28.94	22.06	18.07	10.14	6.44
MVCNMF	2.92	1.74	0.97	0.52	0.23	22.95	15.40	9.30	5.28	2.67
SISAL	2.96	1.94	1.33	0.93	0.63	24.58	17.21	11.29	6.94	4.19
SeCode	3.61	2.35	1.77	1.60	1.46	20.55	11.62	6.34	3.61	2.24
ALMM	3.90	2.07	1.65	1.14	1.04	17.67	12.10	7.04	4.53	3.03
Proposed	<b>1.50</b>	<b>0.77</b>	<b>0.43</b>	<b>0.22</b>	<b>0.15</b>	<b>16.61</b>	<b>10.19</b>	<b>4.29</b>	<b>3.23</b>	<b>1.67</b>

注:加粗字体为每行最优值。

表2  $100 \times 100$  数据集上的性能比较

Tab. 2 Performance comparison on  $100 \times 100$  data sets

性能指标 Regularization	$\Omega_a / (^\circ)$					$\Omega_s / (^\circ)$				
	20 (dB)	25 (dB)	30 (dB)	35 (dB)	40 (dB)	20 (dB)	25 (dB)	30 (dB)	35 (dB)	40 (dB)
FMVSA	7.27	4.63	2.61	1.78	1.03	25.33	16.28	9.34	6.14	3.20
EndNet-VCA	1.98	0.95	0.62	0.35	0.26	21.92	16.72	10.24	8.14	4.20
MVCNMF	3.19	2.01	1.06	0.55	0.25	13.84	8.47	4.79	2.62	1.34
SISAL	3.70	2.48	1.67	1.17	0.87	16.07	10.54	6.93	5.25	4.73
SeCode	2.80	1.65	1.23	1.02	0.93	11.99	7.06	3.64	2.25	1.39
ALMM	1.59	1.41	1.02	0.54	0.46	11.86	7.18	6.24	2.25	1.39
Proposed	<b>1.24</b>	<b>0.70</b>	<b>0.37</b>	<b>0.17</b>	<b>0.11</b>	<b>11.05</b>	<b>6.92</b>	<b>3.50</b>	<b>1.96</b>	<b>1.30</b>

注:加粗字体为每行最优值。

在表3中,所提出的 $L^2RSTV$ 在两个数据集上的RSNR至少提升0.6 dB;最后在信噪比为40 dB的噪声环境下对RMSE测试,测试结果如表4所示,所提出算法RMSE比次优算法降低至少6%,这表

明所提算法中的可分离全变分能够通过减小相邻像元的差值来提高同类端元和其对应丰度的相似性,进而促进端元和丰度特征的平滑性,而对数低秩则通过抑制噪声大大提高解混精度。

表3 不同噪声下各算法的RSNR值

Tab.3 RSNR values of each algorithm under different noise

性能指标 Regularization	Date I					Date II				
	20(dB)	25(dB)	30(dB)	35(dB)	40(dB)	20(dB)	25(dB)	30(dB)	35(dB)	40(dB)
FMVSA	9.26	11.69	14.39	17.22	19.38	9.34	11.93	14.63	17.30	20.04
MVCNMF	10.01	12.45	15.01	17.42	19.45	10.06	12.36	15.02	17.51	20.03
SISAL	10.05	12.35	15.03	17.45	19.50	10.03	12.55	15.05	17.52	20.05
SeCoDe	9.97	12.20	14.16	15.71	16.62	9.87	12.04	13.75	14.92	16.55
ALMM	6.97	7.77	9.87	11.56	14.67	8.46	10.56	12.67	14.33	15.48
EndNet-VCA	7.52	7.66	8.33	9.02	10.32	9.08	10.18	11.21	12.77	15.68
Proposed	<b>10.08</b>	<b>12.56</b>	<b>15.15</b>	<b>17.54</b>	<b>20.15</b>	<b>10.08</b>	<b>12.57</b>	<b>15.16</b>	<b>17.56</b>	<b>20.66</b>

注:加粗字体为每行最优值。

表4 各算法在不同数据集上的均方根误差

Tab.4 Root mean square error of each algorithm in different data sets

指标 数据集	RMSE						
	FMVSA	MVCNMF	SISAL	SeCoDe	ALMM	EndNet-VCA	Proposed
Date I	0.44	0.45	0.43	0.73	0.91	0.84	<b>0.28</b>
Date II	0.19	0.23	0.17	0.42	0.52	0.52	<b>0.16</b>

注:加粗字体为每行最优值。

### 5.3.2 合成数据集的性能分析

选择Cuprite数据集中广泛使用的子场景作为选择区域,本文算法得到的丰度特征如图7所示。该数据集使用虚拟维度方法估计端元数目为 $N=9$ ,实际端元包括九种物质,分别为Muscovite、Alunite、Desert varnish、Hematite、Montmorillonite、Kaolinite 1、Kaolinite 2、Buddingtonite和Chalcedony。图8展示了所提出 $L^2RSTV$ 的和基准解混算法的丰度图,以Muscovite、Buddingtonite和Chalcedony三种端元为例,对于Muscovite端元,从图中可以看出,ALMM解混算法在Muscovite中能够准确提取丰度特征,但在Buddingtonite和Chalcedony出现提取效果较差;EndNet-VCA在Muscovite的丰度图中出现阴影,说明其解混算法受到噪声干扰;FMVSA、MVCNMF、SISAL对Chalcedony无法准确提取其丰度特征;SeCoDe对Muscovite和Buddingtonite能够准确提取丰度特征,但对Chalcedony的提取精度不足;与其他解混算法相比,本文提出的解混算法的丰度特

征分布图清晰度高,其丰度分布也与参考图像的丰度图更接近,这说明本文所提出的算法通过引入可分离总变分能够利用分段平滑特性缩小解空间来提升解混性能。

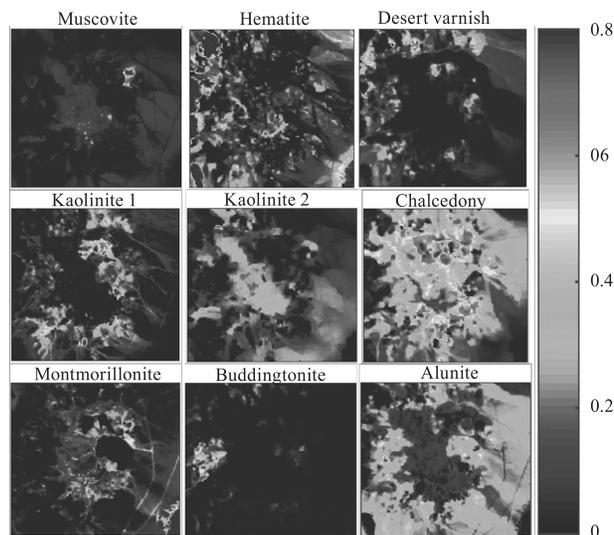


图7 本文算法提取的丰度图

Fig.7 The abundance graph extracted by the algorithm in this paper

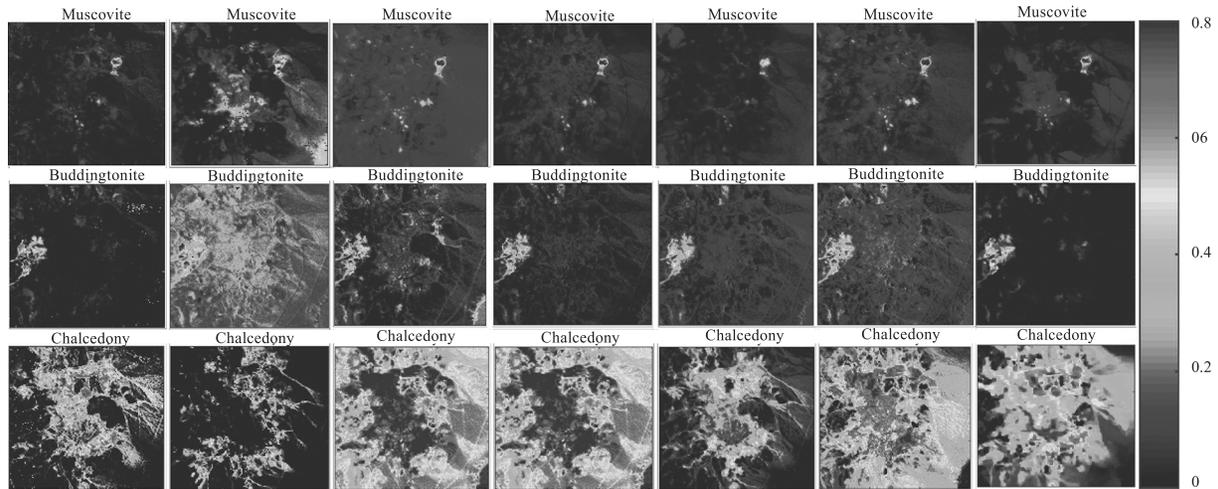


图 8 各算法在真实数据集中的估计丰度图

Fig. 8 The estimated abundance graph of each algorithm in a real data set

### 5.3.3 计算复杂度分析

图 9 展示了提出的算法  $L^2RSTV$  和基线方法估计的光谱曲线。可以看出,所提出的解混算法在视觉上与基线 MVCNMF 获得的端元特征曲线相似,且光谱曲线的变化趋势更平滑,通过引入可分离全变分能够通过缩小相邻像元的差异而促进端元的分段平滑,证明所提算法的正则项的能很好的提升解混性能。

由于数据集维数较大而引入差分矩阵带来的复杂度,本文算法优化后运行时间降低至 300 秒以内。所提出的  $L^2RSTV$  和基线方法的运行时间如表 5 所示。从表中可以看出,FMVSA 在三个数据集上的运行时间最少,而 MVCNMF 的运行时间最长。所提出的方法虽然耗时,仅比 MVCNMF 更短。相较于解混精度的提升,计算成本可忽略。

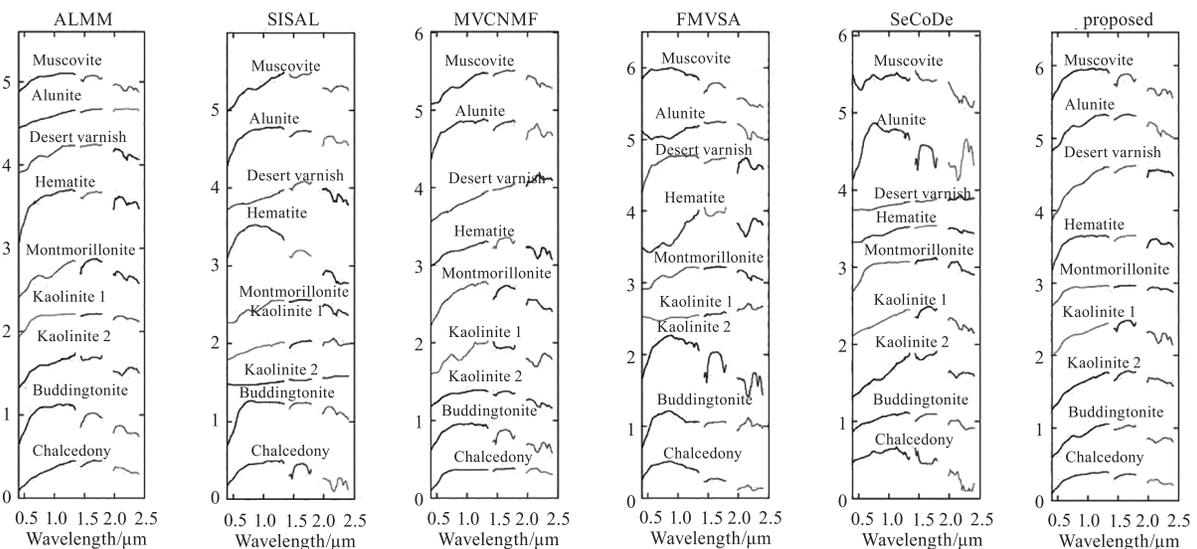


图 9 真实数据中各物质的端元特征图

Fig. 9 Endmember spectral signatures of various substances in real data

### 5.3.4 消融实验

消融实验旨在验证所提出的正则化的有效性,而不是简单地混合这些正则项。因此,设计了具有单独的低秩或总变分正则项的原始解混模型,其中  $\Phi(X)$  (只加丰度平滑)、 $\Phi_a(A)$  (只加端元平滑)和  $\Phi_l(X)$  (只加丰度低秩)以进行性能比

较。以合成数据集 Data1 为例,测试结果如表 6 所示。实验结果表明,与单独对端元或丰度施加平滑,当对端元和丰度矩阵同时施加平滑约束时在一定程度上能降低丰度角和光谱角,说明引入总变分通过分段平滑丰度特征和端元特征能够限制解空间来提高解混精度;与只加平滑约束相比,当

同时考虑平滑约束和低秩时丰度角  $\Omega_s$  和光谱角  $\Omega_a$  下降明显,其中  $\Omega_a$  在 5 组噪声下分别降低 15.32 %、4.29 %、29.73 %、47.06 % 和 45.45 %;丰度角  $\Omega_s$  在 5 组噪声下分别降低 23.98 %、3.03 %、27.71 %、

13.78 % 和 10.77 % ,由此可以看出对数和函数对于性能提升非常敏感,而平滑正则对于性能提升具有鲁棒性,但只有同时考虑低秩和平滑约束时所选模型才能达到最优值。

表 5 各算法的运行时间

Tab.5 Running time of each algorithm

数据集	计算效率						
	FMVSA	MVCNMF	SISAL	SeCode	ALMM	EndNet-VCA	Proposed
Date I	2.43	73.98	3.27	8.95	28.70	3.55	25.03
Date II	1.73	204.29	4.86	10.45	46.82	5.08	88.33
Cuprite	<b>2.59</b>	<b>616.97</b>	<b>11.67</b>	<b>19.99</b>	<b>59.41</b>	<b>10.55</b>	<b>289.53</b>

注:加粗字体为每行最优值。

表 6 130 × 130 数据集上的性能比较

Tab.6 Performance comparison on 130 × 130 data sets

性能指标 Regularization	$\Omega_a$ (degrees)					$\Omega_s$ (degrees)				
	20 (dB)	25 (dB)	30 (dB)	35 (dB)	40 (dB)	20 (dB)	25 (dB)	30 (dB)	35 (dB)	40 (dB)
$\Phi_a(A)$	1.45	0.86	0.39	0.20	0.12	12.80	7.45	4.45	2.45	1.45
$\Phi(X)$	1.36	0.74	0.42	0.22	0.12	14.25	7.87	3.96	2.37	1.43
$\Phi_l(X)$	1.52	0.76	0.41	0.24	0.14	13.47	8.65	5.13	2.50	1.56
$\Phi_a(A) + \Phi(X)$	1.43	0.73	0.48	0.25	0.16	13.70	7.13	4.47	2.23	1.44
$\Phi_a(A) + \Phi(X) + \Phi_l(X)$	<b>1.24</b>	<b>0.70</b>	<b>0.37</b>	<b>0.17</b>	<b>0.11</b>	<b>11.05</b>	<b>6.92</b>	<b>3.50</b>	<b>1.96</b>	<b>1.30</b>

注:加粗字体为每行最优值。

## 6 结论

本文提出了一种基于对数低秩和可分离总变分正则化器相结合的新型优化方法用于盲高光谱解混。研究了丰度矩阵的低秩性质,并利用对数函数来放松低秩达到抑制噪声干扰的目的。对光谱和丰度矩阵施加可分离总变分平滑约束,充分利用光谱和丰度矩阵的局部连续性来促进空间和光谱结构的分段平滑,进而提高解混精度。通过实验结果表明,所提出的方法  $L^2RSTV$  可以将 RSNR 性能至少提高 0.6 dB,光谱角至少降低 4.65 %,丰度角至少降低 2.02 %,并将 RMSE 降低 6 % 以上,能够准确提取端元和丰度特征的同时降低误差,验证了正则化项的有效性。在未来的研究中,我们将进一步探索降低复杂性的收敛规则,并尝试将非局部特征与深度学习模型相结合方法。

## 参考文献:

[1] AZAR S G, MESHGINI S, BEHESHTI S, et al. Linear mixing model with scaled bundle dictionary for hyperspec-

tral unmixing with spectral variability[J]. Signal Processing, 2021, 188:108214.

[2] FERNANDEZ-BELTRAN R, PLA F, PLAZA A. Endmember extraction from hyperspectral imagery based on probabilistic tensor moments[J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2020, 17(12):2120-2124.

[3] SONG D, SUN N, XU M, et al. Fast unmixing of noisy hyperspectral images based on vertex component analysis and singular spectrum analysis algorithms[J]. Canadian Journal of Remote Sensing, 2020, 46(1):34-48.

[4] ZHANG Y, MA Y, DAI X, et al. Locality-constrained sparse representation for hyperspectral image classification[J]. Information Sciences, 2021, 546:858-870.

[5] QI L, LI J, WANG Y, et al. Spectral-spatial-weighted multiview collaborative sparse unmixing for hyperspectral images[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2020, 58(12):8766-8779.

[6] LI C, LIU Y, CHENG J, et al. Sparse unmixing of hyperspectral data with bandwise model[J]. Information Sciences, 2020, 512:1424-1441.

- [7] SU Y, LI J, PLAZA A, et al. DAEN: deep autoencoder networks for hyperspectral unmixing[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2019, 57(7): 4309–4321.
- [8] IORDACHE M D, BIOUCAS-DIAS J M, PLAZA A. Total variation spatial regularization for sparse hyperspectral unmixing[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2012, 50(11): 4484–5402.
- [9] Ma Fei, LI Shuxue, Yang Feixia, et al. Hyperspectral unmixing based on light variability low rank orthogonal prior[J]. *Laser & Infrared*, 2024, 54(4): 642–653. (in Chinese)  
马飞, 李树雪, 杨飞霞, 等. 基于光易变性低秩正交先验的高光谱解混[J]. *激光与红外*, 2024, 54(4): 642–653.
- [10] LV X, WANG W, LIU H. Cluster-wise weighted nmf for hyperspectral images unmixing with imbalanced data[J]. *Remote sensing*, 2021, 13(2): 268–287.
- [11] LI S, LI W, CAI L, et al. Subspace multi-regularized non-negative matrix factorization for hyperspectral unmixing[J]. *Applied Intelligence*, 2022, 53(10): 1–23.
- [12] HU Z, NIE F, WANG R, et al. Low rank regularization: a review[J]. *Neural Networks*, 2021, 136(1).
- [13] 贺洋, 赵嘉悦, 夏井新, 等. 低秩和稀疏张量表示的交通数据恢复和异常值检测方法: CN202211492049. 4 [P]. 2023–04–07.
- [14] XIE Q, ZHAO Q, MENG D, et al. Multispectral images denoising by intrinsic tensor sparsity regularization[C]// 2016 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition ( CVPR ). Las Vegas: IEEE, 2016: 1692–1700.
- [15] DIAN R, LI S. Hyperspectral image super-resolution via subspace-based low tensor multi-rank regularization[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2019, 28(10): 5135–5146.
- [16] MA F, HUO S, YANG F. Graph-based logarithmic low-rank tensor decomposition for the fusion of remotely sensed images[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 2021, 14: 11271–11286.
- [17] YAO J, HONG D, XU L, et al. Sparsity-enhanced convolutional decomposition: a novel tensor-based paradigm for blind hyperspectral unmixing[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2021, 60: 1–14.
- [18] LIN C H, CHI C Y, WANG Y H, et al. A fast hyperplane-based minimum-volume enclosing simplex algorithm for blind hyperspectral unmixing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(8): 1946–1961.
- [19] LI J, AGATHOS A, ZAHARIE D, et al. Minimum volume simplex analysis: a fast algorithm for linear hyperspectral unmixing[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2015, 53(9): 5067–5082.
- [20] SEVILLA J, MARTIN G, NASCIMENTO J M P. Parallel hyperspectral unmixing method via split augmented lagrangian on GPU[J]. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 2016, 13(5): 626–630.
- [21] HONG D, YOKOYA N, CHANUSSOT J, et al. An augmented linear mixing model to address spectral variability for hyperspectral unmixing[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2019, 28(4): 1923–1938.
- [22] ÖZKAN S, KAYA B, ESEN E, et al. EndNet: sparse AutoEncoder network for endmember extraction and hyperspectral unmixing[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2019, 57(1): 482–496.
- [23] ZHUANG L, LIN C H, FIGUEIREDO M A, et al. Regularization parameter selection in minimum volume hyperspectral unmixing[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2019, 57(12): 9858–9877.