

# UR90 多元件激光谐振腔的数值矩阵方法研究

杨美霞, 钟 鸣, 罗冠泰, 何衡湘, 任 钢, 薛亮平  
(西南技术物理研究所, 四川 成都 610041)

**摘 要:**以复杂光学元件的复振幅调制函数为基础,建立了复杂腔形的有限元传输矩阵。采用多元件激光谐振腔的数值矩阵方法计算了 UR90 腔的各阶本征模式和损耗,与 FFT 方法计算结果比较,具有一致性。对数值矩阵计算方法进行分析,总结了计算结果收敛度与离散元之间的关系,分析了产生这种关系的机理。

**关键词:**激光;多元件谐振腔;传输矩阵构造;激光本征模式

**中图分类号:** O436      **文献标识码:** A

## Study on numerical matrix method for UR90 multi-element laser resonator

YANG Mei-xia, ZHONG Ming, LUO Guan-tai, HE Heng-xiang, REN Gang, XUE Liang-ping  
(Southwest Institute of Technical Physics, Chengdu 610041, China)

**Abstract:** Based on complex amplitude modulation function of optical components, transfer matrix of complex-shaped cavity is established in the paper. The eigen transverse mode distribution and corresponding loss coefficient of UR90 are calculated. The result is consistent with the calculating results by FFT method. The method of numerical Matrix is analyzed, and the relationship between convergence degree with discrete element is explained.

**Key words:** laser; multi-element laser resonator; construction of transfer matrix; laser eigen transverse mode

### 1 引 言

激光器横模结构和空间强度分布决定了激光器的一些最主要的特性,如激活介质的利用率、光学元件的尺寸、输出光束传输特性等。通过计算获得的谐振腔的横模结构,进而分析横模分辨率、失调灵敏度以及其他各种畸变对输出光束质量的影响程度等,是对非稳腔性能进行综合评价的重要依据,也是进一步控制输出光束和优化光束质量的理论前提。激光模式的计算方法主要有解析方法、数值模拟。能够得到解析解的激光谐振腔很少,大部分计算采用数值模拟,其中主要有 fox-li 迭代<sup>[1-2]</sup>, FFT<sup>[3-4]</sup>, 有限元数值矩阵方法<sup>[5-7]</sup>。有限元数值矩阵方法就是将衍射积分方程以及激光腔光学元件对光场的传输调制过程化为传输矩阵形式,再通过求解矩阵特征向量和特征值的方法得到这一系列共振模以及对应损耗系数。

多光学元件激光谐振腔因为其光学元件多,常

常涉及透镜、透镜阵列、球面反射镜、变反射镜等复杂光学元件,所以较难求解,特别是有限元数值矩阵法求解多元件激光谐振腔,文献中鲜有报道。本文建立了复杂腔形的有限元传输矩阵,并计算了 UR90 腔的各阶本征模式。对数值矩阵计算方法进行了分析,总结了计算结果收敛度与离散元之间的关系,分析了产生这种关系的机理。

### 2 数值矩阵的构造

#### 2.1 自由空间衍射

从衍射屏开始传播的光场初始复振幅,经过自由空间传播,到达观察屏的传输过程可以用有限元方法构造传输矩阵,腔镜的划分如图 1 所示。衍射的复振幅变换可由式(1)关系式表述:

作者简介:杨美霞(19-),女,博士,主要从事强激光技术方面的研究。E-mail: yangmx0430@163.com

收稿日期:2010-12-26;修订日期:2011-02-18

$$\begin{bmatrix} \varphi_2(1) \\ \varphi_2(2) \\ \vdots \\ \varphi_2(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{12}(1,1) & A_{12}(1,2) & \cdots & A_{12}(1,m) \\ A_{12}(2,1) & A_{12}(2,2) & \cdots & A_{12}(2,m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{12}(n,1) & A_{12}(n,2) & \cdots & A_{12}(n,m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(1) \\ \varphi_1(2) \\ \vdots \\ \varphi_1(m) \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中,等号左边的向量  $\varphi_2$  表示观察屏上的光场复振幅分布;等号右边的矩阵  $A_{12}$  是表征自由空间传播的传输矩阵;向量  $\varphi_1$  表示衍射屏上的光场复振幅分布,即初始光场。光场复振幅向量是将屏上的空间离散化,每个有限元面积上的复振幅认为是常数,这些复振幅常数按照一定的顺序排列成向量,就代表屏上的光场分布。传输矩阵的求解是按照由菲涅耳-基尔霍夫衍射积分方程求解两屏之间的有限元两两关系组成的矩阵。

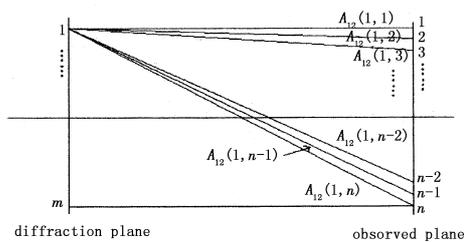


图1 腔镜划分  
Fig.1 division of mirror

下面说明矩阵  $A_{12}$  的构造方法。

设衍射屏上的光场分布为向量  $\varphi_1$ , 经过空间衍射距离  $L$ , 得到观察屏的光场分布向量  $\varphi_2$ 。由菲涅耳-基尔霍夫衍射积分方程有:

$$\varphi_2(t) = \frac{ik}{4\pi s_1} \int \varphi_1 \frac{e^{-ik\rho(s,t)}}{\rho} (1 + \cos\alpha) ds \quad (2)$$

其中,  $\rho$  是两屏上的两点间的距离;  $\alpha$  为两点连线与光轴的夹角。

将衍射屏和观察屏离散化后:

$$\varphi_2(t) = \frac{ik}{4\pi} \sum_{s=1}^m \varphi_1(s) \frac{e^{-ik\rho(s,t)}}{\rho(s,t)} (1 + \cos\alpha(s,t)) dS(s) \quad (3)$$

式中,  $s, t$  分别代表衍射屏和观察屏上的离散单元顺序。其中:

$$\rho(s,t) = \sqrt{(x_s - x_t)^2 + (y_s - y_t)^2 + L^2} \quad (4)$$

$$\alpha(s,t) = \arccos(L/\rho(s,t)) \quad (5)$$

令:

$$A_{12}(s,t) = \frac{ik}{4\pi} \frac{e^{-ik\rho(s,t)}}{\rho(s,t)} (1 + \cos\alpha(s,t)) dS(s) \quad (6)$$

则:

$$\varphi_2(t) = \sum_{s=1}^m A_{12}(s,t) \times \varphi_1(s) \quad (7)$$

式中,  $L$  为自由空间传播距离;  $dS$  为离散元面积单元。式(7)的数学含义是向量  $\varphi_2$  的第  $t$  个元等于矩阵  $A_{12}$  的第  $t$  行与向量  $\varphi_1$  相乘,这正是式(1)所表达的意思,所以根据式(6)得到矩阵  $A_{12}$  就是自由空间衍射的传输矩阵,传输矩阵的维数和特性与传输距、与离散元划分方式以及排列方式有关。 $A_{12}[s,t]$  的物理意义为:衍射屏上单元  $s$  的复振幅对观察屏上单元  $t$  的复振幅的作用。

### 2.2 透镜

光路中透镜的传输矩阵为:

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-ikx_1^2/f} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{-ikx_2^2/f} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{-ikx_n^2/f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{01} \\ \varphi_{02} \\ \vdots \\ \varphi_{0n} \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中,  $\varphi_0$  为透镜前表面复振幅分布;  $\varphi$  为透镜后表面的光场复振幅分布。因为透镜对复振幅的调制不像衍射那样两两相关,透镜后表面某一离散元的复振幅只与前表面对应离散元的复振幅相关,与其他离散元不相关,所以数值矩阵的非对角元均为零,对角元的中心部分为透镜的调制函数,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 分别表示  $n$  个位置微元的坐标,  $f$  表示透镜的焦距。

### 2.3 光阑

以一维光场分布为例,用一个  $n$  维向量  $[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n]$  表示光场分布,若只考虑光阑引起场振幅的变化,则光阑前后表面的光场分布变化关系就简单表述为:

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{01} \\ \varphi_{02} \\ \vdots \\ \varphi_{0n} \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中,  $\varphi_0$  为光阑前表面复振幅分布;  $\varphi$  为光阑后表面的光场复振幅分布。数值矩阵的非对角元均为零,对角元的中心部分为 1, 对角元两边部分为 0, 对角元为 1 的个数取决与光阑的内孔半径。

根据以上构建数值矩阵的思想同样可以得到其他光学元件的数值矩阵,如高斯反射镜、柱面透镜、倾斜平面镜等。方便多元件激光谐振腔本征模式的求解。

### 3 UR90 腔数值矩阵计算

根据激光模式自再现原理,有:

$$\varphi = \gamma\varphi_0 = A\varphi_0 \quad (10)$$

式中,  $\gamma$  为表示振幅衰减和相位波动的复常数因子;  $\varphi_0$  为能够稳定存在, 实现模式自再现的激光模式。数学意义上, 等式(10)表示为  $\varphi_0$  矩阵  $A$  的特征向量,  $\gamma$  为对应的特征值, 数学上的本征概念等价于物理上的自再现的概念, 所以激光模式的求解归结为激光腔传输矩阵  $A$  的构造及其特征根特征向量的求解。

UR90 腔是一种典型的多元件激光谐振腔<sup>[8]</sup>, 如图2所示: M3M4 代表一个屋脊镜。凹透镜 f1 和凸透镜 f2 构成扩束系统。Z1Z2 是两片端面垂直的 Nd:YAG 陶瓷片, 他们共同构成与屋脊镜 M3M4 相对的另一个屋脊镜。D 代表输出耦合椭圆孔光阑, 圆孔的半径和增益介质的尺寸决定了系统的放大率。M1M2 代表两个平面反射镜, 它们共同实现对光束的空间平移。图1是俯视图, 观察面为  $x-z$  平面,  $y$  轴方向为垂直纸面向外。屋脊镜 Z1Z2 的棱位于  $x-y$  平面, 与  $y$  轴平行, 屋脊镜 M3M4 的棱也位于  $x-y$  平面内, 与  $y$  轴成  $45^\circ$ 。以输出耦合镜 D 为参考平面, 光在其环形光路中环形一周后的等效光路如图3所示。

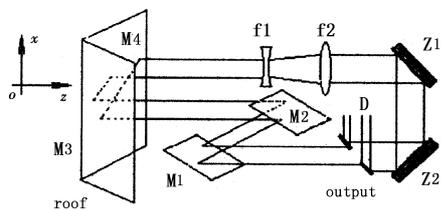


图2 UR90 示意图

Fig.2 structure scheme of UR90

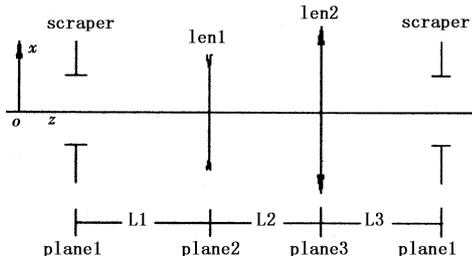


图3 环形腔展开示意图

Fig.3 unfold sketch of ring resonator

图3中平面1处光阑的矩阵  $A_{11}$  用关系式(9)构造, 平面2和平面3两处透镜的矩阵  $A_{22}, A_{33}$  分别用关系式(8)构造, 空间衍射传输距离  $L_1, L_2, L_3$  的矩阵  $A_{12}, A_{23}, A_{31}$  分别由关系式(6)求得。该腔的传输矩阵  $A$  为各矩阵依次相乘:

$$A = A_{31}A_{32}A_{23}A_{22}A_{12}A_{11} \quad (11)$$

#### 4 计算结果

本文计算了等效菲涅尔数为 1.4, 放大率为 1.56 的 UR90 腔模式分布, 得到的最低阶损耗模与 FFT 的计算结果比较, 具有一致性。

计算结果如图4所示, 实线和虚线分别为数值矩阵方法计算得到的最低阶损耗模和 FFT 方法计算的得到自再现模式, FFT 方法计算无源腔的激光模式, 能得到最低损耗的模式, 而数值矩阵方法得到一系列可能存在的本征模式, 其中本征值最大的模式与 FFT 迭代方法的计算结果对应。由图4可以判断, 该腔的最低阶损耗模对应横模结构  $TME_{01}$ 。

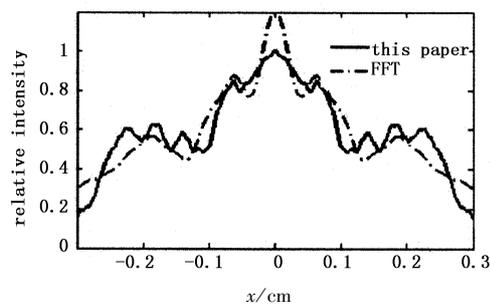
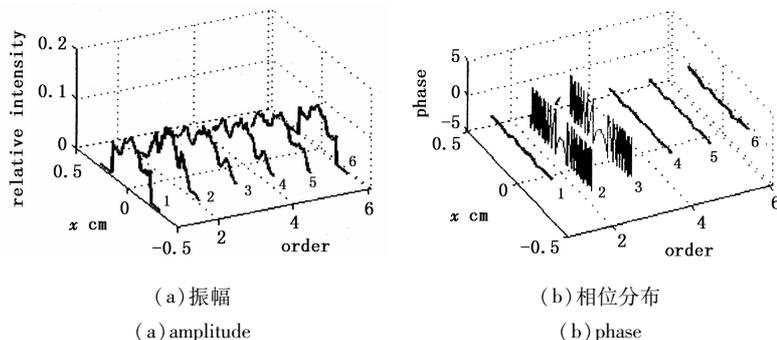


图4 最低阶损耗模振幅分布

Fig.4 amplitude distribution of the lowest loss mode

图5(a)为最低阶损耗模在腔内环形一周过程中在腔内各位置处的振幅变化, 图5(b)为最低阶损耗模在腔内环形一周过程中在腔内各位置处的相位变化。1表示光阑后表面, 相位近似平面, 光强只有中心透射部分, 边缘部分为0; 2表示凹透镜后表面, 经过距离  $L_1$  的衍射和透镜的相位调制, 变成发散的球面波, 光强分布也发生变化; 3表示凸透镜前表面, 4表示凸透镜后表面, 从光强分布的变化可以看到实现了扩束, 同时经过与凹透镜虚共交位置的凸透镜, 相位面变为近似平面; 5表示光阑前表面, 6表示回到光阑后表面。从变化过程可以看出, 1和6的模式分布完全相同, 实现了自再现。



(a) 振幅

(a) amplitude

(b) 相位分布

(b) phase

图5 腔内环形一周的最低阶损耗模式

Fig.5 amplitude distribution of the lowest loss mode in the ring resonator

数值矩阵方法的优点是可以同时计算多个不同损耗的可能存在的激光模式,有利于分析腔的选模特性,模式分辨率,以及对模式控制的理论研究。图6给出UR90腔低阶损耗模的前三个模式,它们对应的本征值 $\gamma$ 分别为 $0.8566 - 0.2149i$ ,  $0.5137 - 0.5850i$ ,  $0.7580 + 0.0064i$ 。单程损耗系数为 $1 - |\gamma|$ 。

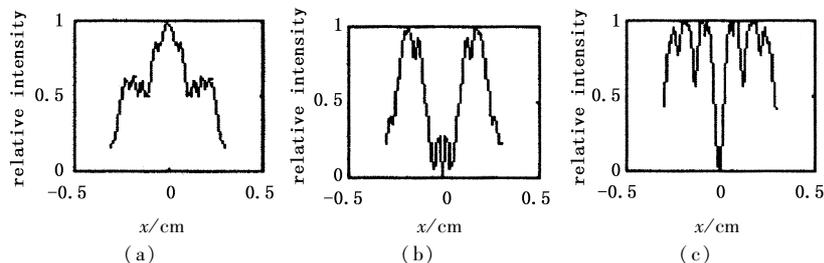


图6 前三个低阶损耗模式

Fig.6 the first three modes

数值矩阵方法中离散单元划分对计算结果有影响,当离散元数目太小,计算不能收敛,得不到具有物理意义的计算结果。此时将离散元细分,随着离散元的划分变的详细,计算能够收敛,得到具有物理意义的激光模式,但是,继续将离散元细分,会发现代表激光模式的特征向量不变,但其对应的本征值会逐渐增大,直到离散化的精细程度达到一个最优的值,本征值才不随着离散元划分的变化而变化,而达到一个恒定值。这是一个有限元数学思想与物理实际之间的矛盾。光场的复振幅是表征光场强度和相位的复数,离散元的取样率必须远大于光场强度和相位的变化频率,离散元内的复振幅变化才能看成是复常数,计算结果才逼近真实值。对于菲涅尔数较大的激光腔,离散元数目取值必须更大。对于多元件激光谐振腔,除了衍射菲涅尔数,即菲涅耳半波带数对离散元数目的限制,还有透镜复振幅变换函数对离散元数目的限制,特别是大光圈透镜,短波长激光。

## 5 总结

本文阐述了多元件激光谐振腔的有限元数值矩阵方法,以UR90腔为例,介绍了多元件激光谐振腔的矩阵构造,计算了UR90激光谐振腔的各阶激光模式,与FFT方法计算结果具有一致性,而有限元数值矩阵方法可以同时计算多阶模式,这点对于腔的选模特性,模式分辨率,以及对模式控制的研究具有理论意义。对于离散元数目对计算结果的影响的规律作了说明,对于方法的优化和计算结果的分析具有指导意义。

## 参考文献:

- [1] A G Fox, T Li. Resonant mode in an optical maser [J]. Proc. IRE., 1960, 48: 1904 - 1905.
- [2] Liu Wenbing, Zhong Ming, Xia Huijun, et al. Output mode simulation of corner cube resonator [J]. Laser & Infrared, 2010, 40(7): 710 - 715. (in Chinese)  
刘文兵, 钟鸣, 夏惠军, 等. 角锥棱镜谐振腔输出模式模拟研究 [J]. 激光与红外, 2010, 40(7): 710 - 715.
- [3] Sziklas E A, Siegman A E. Mode calculations in unstable resonator with flowing saturable gain: Fast fourier transform method [J]. Appl. Opt, 1975, 14(8): 1874 - 1889.
- [4] Du Shaojun, Lu Qisheng, Shu Bohong, et al. Laser mode changing with deformation of resonator mirrors under irradiation [J]. High Power Laser and Particle Beams, 2007, 19(1): 53 - 57. (in Chinese)  
杜少军, 陆启生, 舒柏宏, 等. 激光辐照下非稳腔镜变形对激光模式的影响 [J]. 强激光与粒子束, 2007, 19(1): 53 - 57.
- [5] Cheng Yuanying, Wang Youqing, Hu Jin, et al. A novel eigenvector method for calculation of optical resonator modes and beam propagation [J]. Acta Physica Sinica, 2004, 53(8): 2576 - 2582. (in Chinese)  
程愿应, 王又青, 胡进, 等. 一种新颖的用于光腔模式及光束传输模拟的特征向量法 [J]. 物理学报, 2004, 53(8): 2576 - 2582.
- [6] Yong Fuqiang, Wang Youqing. Numerical matrix method for calculation of resonator mode [J]. Optics & Optoelectronic Technology, 2005, 3(5): 42 - 44. (in Chinese)  
雍富强, 王又青. 有源腔模式的有限元数值矩阵计算方法 [J]. 光学与光电技术, 2005, 3(5): 42 - 44.
- [7] Cheng Yuanying, Hu Jin, Wang Hansheng, et al. A unstable resonator for transverse-flow CO<sub>2</sub> laser [J]. Laser & Infrared, 2010, 32(4): 243 - 244. (in Chinese)  
程愿应, 胡进, 王汉生, 等. 一种横流 CO<sub>2</sub> 激光器多折非稳腔 [J]. 激光与红外, 2010, 32(4): 243 - 244.
- [8] Yang meixia, Zhong Ming, Xia Huijun, et al. Design and numerical simulation for unstable ring resonator with 90° beam rotation employed in ceramic YAG disk laser [J]. Chinese J. Lasers, 2010, 37(10): 2472 - 2476. (in Chinese)  
杨美霞, 钟鸣, 夏惠军, 等. 片状陶瓷激光器的束转动 90° 环形非稳腔设计与数值模拟 [J]. 中国激光, 2010, 37(10): 2472 - 2476.