

文章编号:1001-5078(2024)12-1827-07

· 激光应用技术 ·

# 改进 Crust 算法的点云复杂曲面精细化三维重建

张前,王健,齐智宇,王政辉  
(山东科技大学 测绘与空间信息学院,山东 青岛 266590)

**摘要:**针对基于 Delaunay 三角剖分的 Crust 算法在对激光点云和影像点云进行复杂曲面三维重建时模型表面不够光滑、耗时长、精度不高的问题,该文提出一种改进的点云三维重建方法。该方法首先用体素重心临近特征点算法进行下采样;之后使用移动最小二乘算法拟合函数并确定二次基函数和高斯权函数完成数据平滑与优化;然后使用基于自适应外接圆 Delaunay 三角剖分方法的 Crust 算法进行重建,得到粗三角网格;最后采用四面体的外接球半径与其最短边长比值剔除不合格四面体,完成对模型的优化与重建。经过实验验证,该方法可以减少孔洞和重建时间,构建出平滑、点云点云拓扑结构更为准确的三维模型。

**关键词:**三维重建;激光点云;影像点云;Delaunay 三角剖分;Crust 算法

**中图分类号:**TN249;TN958.98 **文献标识码:**A **DOI:**10.3969/j.issn.1001-5078.2024.12.004

## Refined 3D reconstruction of point cloud complex surface with improved Crust algorithm

ZHANG Qian, WANG Jian, QI Zhi-yu, WANG Zheng-hui

(College of Geodesy and Geomatics, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China)

**Abstract:** Aiming at the problems that the Crust algorithm based on Delaunay triangulation is not smooth enough, time-consuming, and has low accuracy when reconstructing complex surfaces from laser and image point clouds, an improved 3D point cloud reconstruction method is proposed. Firstly, the voxel barycentric near feature point algorithm is used for down-sampling. After that, the moving least squares algorithm is used to fit the function and determine the quadratic basis function and Gaussian weight function to complete the data smoothing and optimization. Then, the Crust algorithm based on the adaptive extrinsic circle Delaunay triangulation method is used to reconstruct the coarse triangular mesh. Finally, the ratio of the outer radius of the tetrahedron to the shortest side length of the tetrahedron is used to eliminate the unqualified tetrahedron and complete the reconstruction and optimization of the model. The experimental results show that this method can reduce the time of holes and reconstruction, and build a smooth 3D model with more accurate topology of point cloud.

**Keywords:** 3D reconstruction; laser point cloud; image point cloud; Delaunay triangulation; Crust algorithm

### 1 引言

随着现代化的高速发展,“智慧城市”、“数字城市”概念的提出<sup>[1]</sup>,各个行业都在积极响应智慧化、数字化的号召,实景三维<sup>[2]</sup>作为新型基础测绘,在大数据

据时代下凭借着可以表征三维实体的垂直分布特点,得到了广泛关注。目前三维重建技术主要分为<sup>[3]</sup>:基于 B 样条曲面重建<sup>[4]</sup>和 NURBS 曲面重建<sup>[5]</sup>的参数曲面重建<sup>[6]</sup>、隐式曲面重建和网格曲面重建。

**基金项目:**山东省自然科学基金项目(No. ZR2023MD027)资助。

**作者简介:**张前(1998-),男,硕士研究生,主要研究方向为 LiDAR 数据处理与分析。E-mail:18739435071@sdust.edu.cn

**通讯作者:**王健(1974-),女,博士,副教授,研究方向为主要从事现代测量数据处理理论和 LiDAR 技术的研究。

E-mail:wangj@sdust.edu.cn

**收稿日期:**2024-02-27

利用三维激光技术和倾斜摄影测量技术进行三维模型构建是现在的研究热点。目前已引起部分学者的重视和兴趣。李晓斌<sup>[7]</sup>利用影像数据与点云数据相结合,进行相似特征点的匹配,在此基础上构建 TIN 三角网完成了古建筑的三维重建,但是对于结构复杂的物体进行重建时,重建效果往往不佳。Bybee<sup>[8]</sup>提出把航空影像的光束法平差方法用于机载 LiDAR 点云与倾斜影像数据上,从而生成地面三维模型;Li<sup>[9]</sup>利用影像中提取的曲线进行重建,通过优化曲线段附近的 Delaunay 四面体的形状、体积等使三维模型效果更好,上述方法虽然能完成重建但是容易受影像质量的影响,当影像质量不好时重建效果不佳。汪霞<sup>[10]</sup>针对影像和激光点云三维重建问题分别采用贪婪投影三角化算法,泊松曲面重建算法,移动立方体算法进行实验,对于贪婪投影三角化算法,虽然适用性广,但对于噪声、外点比较敏感;对于泊松重建算法虽然生成的曲面较为光滑,但对于不封闭点云效果不佳;移动立方体生成的曲面质量较差并且容易产生曲面轮廓二义性。何士伟<sup>[11]</sup>提出了多准则约束 Delaunay 的三维重建算法完成复杂曲面模型构建,通过设置约束条件阈值,调节权重参数使得生成的三角形达到最优,从而完成复杂曲面构建,该方法得到的模型效果要优于传统 Delaunay 算法,但需对约束条件设置阈值并多次通过调节权重参数进行三角形的选择,过程较为复杂。陈喆<sup>[12]</sup>采用改进的 Crust 算法对复杂物体进行重建,通过在求取相邻两个四面体的中心欧式距离的基础上求取交叉系数,删除不符合标准的三角形从而完成三维重建,但当处理大量且拓扑关系复杂的点云时,会存在效率低的情况。

综上所述,针对曲率变化较大且表面复杂的物体在重建过程中表面不够光滑、耗时长、精度不高的问题,本文提出一种改进基于 Delaunay 三角化的 Crust 算法,实现提高重建模型的速度与精度。

## 2 基于 Delaunay 三角剖分的 Crust 算法

Voronoi 图和 Delaunay 三角剖分是 Crust 算法的核心内容,通过计算离散点云的 Voronoi 图求取物体的中心轴,对求取的中心轴进行变换得到目标表面,从而完成点云数据的三维重建<sup>[13]</sup>。

### 2.1 Voronoi 图

Voronoi 图又称为泰森多边形,是由点集中所有相邻两点的垂直平分线相交构成的多边形网格,是

对空间按照最邻近原则的一种剖分方式<sup>[14]</sup>。Voronoi 多边形可以定义为式:

$$V_i = \{x \in R^n : \|x - p_i\| \leq \|x - p_j\|, j=1, 2, \dots, n, i \neq j\} \quad (1)$$

式中,  $\|x - p_i\|$  代表任意点  $x$  与点集  $p_i$  之间的欧氏距离,所以点集  $P$  的 Voronoi 图如图 1 所示。

$$V(P) = \bigcup_{i=1}^n V_i \quad (2)$$

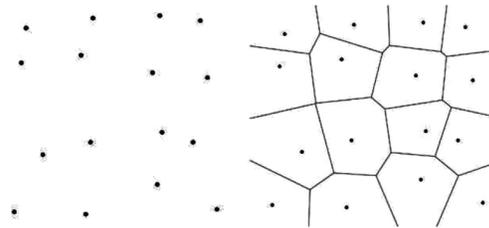


图 1 点集的 Voronoi 图

Fig. 1 Voronoi diagram of point set

### 2.2 Delaunay 三角剖分

针对 Voronoi 区域中每个采样点都对应一个 Voronoi 单元,任意一条边就是相邻两点的垂直平分线,Voronoi 区域最多包含  $n-1$  条边,将区域中所有共边的中心连接起来构成三角网格的过程称为 Delaunay 三角剖分,此图形也称为 Voronoi 图的对偶图。Delaunay 三角剖分与 Voronoi 之间的关系如图 2 所示。其中实线代表 Delaunay 三角形,虚线为 Voronoi 图。

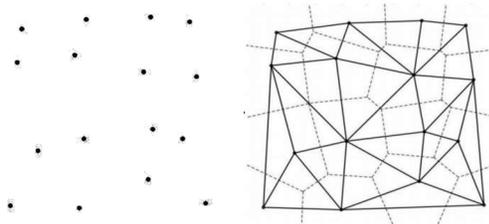


图 2 Voronoi 图和 Delaunay 三角形

Fig. 2 Voronoi diagram and Delaunay triangle

### 2.3 Crust 算法

中轴:若空间封闭曲面内部存在与曲面相切的球体,并且每个位置的球体都是当前位置半径最大的球体,故所有球体球心的集合称为封闭曲面的中轴。

极点:对于点集中的某个点来说,它的极点是自身 Voronoi 图中距离它最远的 Voronoi 图顶点。如果 Voronoi 图不是闭合的,极点就在无穷远处。点集中每个点在两个不同的方向都对应两个极点  $p^+$

和  $p^-, p^+$  距离最远,  $p^-$  在相反方向。

Crust 的定义为:假设  $S$  为某点集,  $V$  为  $S$  的 Voronoi 图中顶点的集合,令  $S' = S \cup V$ ,对  $S'$  进行 Delaunay 三角剖分,若三角网中的任一条边中的两个端点都属于点集  $S$ ,则该边属于 Crust。

Crust 算法计算步骤:

- (1) 计算点集  $S$  的 Voronoi 图;
- (2) 对于  $S$  中的采样点,确定正负极点。
- (3) 设所有极点集合为  $V$ ,令  $S' = S \cup V$ ,计算  $S'$  的 Delaunay 三角剖分。
- (4) 对三角面片进行判断并删除多余面片,计算三角面向量之间和顶点到正极点的法向量的夹角,删除夹角过大的三角面。
- (5) 整理并输出三角网格曲面。

### 3 改进基于 Delaunay 三角剖分的 Crust 算法

#### 3.1 体素重心临近特征点下采样

体素下采样的原理是在保留点云的精细特征的前提下按照设定大小,把点云分割成各个体素,并采用其重心代替体素中所有点,达到精简点云数据的目的。实现的步骤如下:

(1) 确定体素网格的边长  $L$ ,将点云分割成  $A \times B \times C$  个立方体体素;

$$\begin{cases} A = \text{ceil}[(x_{\max} - x_{\min})/L] \\ B = \text{ceil}[(y_{\max} - y_{\min})/L] \\ C = \text{ceil}[(z_{\max} - z_{\min})/L] \end{cases} \quad (3)$$

式中,  $x_{\max}, x_{\min}, y_{\max}, y_{\min}, z_{\max}, z_{\min}$  分别是 XYZ 坐标轴上点云坐标的最大值、最小值,  $\text{ceil}()$  为上取整;

(2) 对体素网格编码,确定体素网格的空间索引  $(h_x, h_y, h_z)$ ;

$$\begin{cases} h_x = \text{celi}[(x - x_{\min})/L] \\ h_y = \text{celi}[(y - y_{\min})/L] \\ h_z = \text{celi}[(z - z_{\min})/L] \end{cases} \quad (4)$$

(3) 建立拓扑关系。采用 PCA 将平面法线问题转换成协方差矩阵特征值和特征向量的求解问题。对于点云中任意一点  $p_i$ ,使用 KD-tree 算法搜索邻近点数量,得到协方差矩阵。

$$M = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k [p_i - p_0] [p_i - p_0]^T \quad (5)$$

式中,  $k$  表示邻域内点云数,  $p_0$  为邻域点质心坐标,特征向量  $n$  是点  $p_i$  的法向量。另外需要利用  $\vec{v} \cdot \vec{n} > 0$  消除法向量指向二义性。

(4) 选取特征点。计算点云中任一点  $p_i$  和其邻域点法向量夹角的算术平均值:

$$f_i = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \theta_{ij} \quad (6)$$

$f_i$  越大表示该区域内法向量变化越大,点云的特征变化越明显,设定适当的阈值  $\Gamma$ ,当  $f_i \geq \Gamma$  时,选为特征点。遍历所有体素网格,实现体素重心临近特征点的下采样。

#### 3.2 移动最小二乘 (MLS) 算法平滑优化

为实现点云的平滑优化获得平滑的三维模型,使用移动最小二乘法<sup>[15]</sup>对点云进行平滑优化,该方法基本原理如下:

##### 3.2.1 建立拟合函数

在一个局部拟合领域上拟合函数  $f(x)$  可以近似表示为:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x) a_i(x) = p^T(x) a(x) \quad (7)$$

式中,  $a(x) = [a_1(x), a_2(x), \dots, a_m(x)]^T$  为待定系数;  $p(x) = [p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)]^T$  为基函数;  $m$  代表基函数的项数,二维问题下基函数的表达式可以为:

线性基通常表示:

$$p(x) = [1, x, y]^T, m = 3;$$

二次基可以表示为:

$$p(x) = [1, x, y, x^2, y^2, xy]^T, m = 6。$$

为了求取最精确的局部逼近值来拟合曲面,需要对拟合函数值和其邻域内各点处的值之间的加权平均值和最小,即是离散加权范式  $J$  最小:

$$J = \sum_{i=1}^n w(\|x - x_i\|) \cdot [f(x) - y_i]^2 \quad (8)$$

式中,  $w(\|x - x_i\|)$  代表点  $x_i$  的权值函数;  $\|x - x_i\|$  代表拟合点  $x$  与的  $x_i$  的欧氏距离。对  $J$  进行求导,并令  $\partial J / \partial \alpha = 0$ ,从而得到  $\alpha(x)$  的值:

$$a = (BWB^T)^{-1} BWy \quad (9)$$

式中,  $B$  为二次基函数矩阵;  $W$  表示关于权函数  $n \cdot n$  的对角矩阵;  $y = [y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_n)]^T$ 。

##### 3.2.2 确定权函数

MLS 算法权函数具有只在  $x$  邻域内大于 0,在邻域之外恒等于 0 的紧支性,紧支性权函数的引入增加了拟合函数的平滑性,高斯权函数的函数表达式为:

$$w(\|x - x_i\|) = \exp\left(-\frac{\|x - x_i\|^2}{h^2}\right) \quad (10)$$

式中,  $h$  越大, 高斯权函数越大, 点云平滑度越高。

将高斯权函数代入式(1)中就可以求得系数矩阵  $a(x)$ , 得到拟合函数  $f(x)$ , 从而完成点云数据的平滑优化。

### 3.3 基于自适应外接圆最优点判断

在利用 Crust 算法对点云进行三维重建时, Delaunay 三角剖分算法的核心是寻找满足条件的最优点, 若无规则的在点集中寻找拓展最优点来完成对极点和采样点进行三角剖分, 因为点云进行三角剖分需满足空外接圆准则, 每寻找一个点就要对此三角形做外接圆, 之后判断该外接圆内部是否含有其他的点, 在点云数据量较大的情况下, 会消耗大量的时间; 另外针对于四点共圆的情况下, Delaunay 准则会寻找到多个扩展点, 若按照 Delaunay 准则继续进行网格模型重建, 对于重建的表面会产生交叉重叠的情况。针对此情况提出一种自适应外接圆的方法在点集中进行最优点的寻找, 采用自适应外接圆选取最优点的方法将扩展点的范围限定在合适的区域内来代替传统的将扩展点的距离设置为一个阈值。

自适应外接圆选择最优点的方法主要思想是首先在点集中找到距离生长边距离最近的点, 此点可以与生长边构建三角形, 之后判断所构建三角形的外接圆内是否包含其他的点, 如果包含点则任意选择一个点作为新的拓展点并且与生长边构建新的三角形, 然后判断这个三角形的外接圆中是否包含其他点, 重复步骤直至圆内没有点, 那拓展点就是寻找的最优点。示意图如图 3 所示。AB 是生长边, O 是其中点, 任意选择一点 C,  $\triangle ABC$  确定一个外接圆, 圆内包含 DEF-GH 五个点;  $\triangle AB$  的外接圆, 圆内包含 FGH 三点;  $\triangle AGB$  外接圆内没有点, 则点 G 就是最优点。

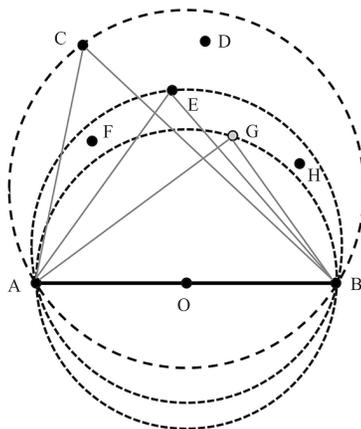


图 3 自适应外接圆示意图

Fig. 3 Schematic diagram of adaptive peripheral circle

### 3.4 Delaunay 四面体网格模型优化

传统的 Crust 算法是在点云经过 Delaunay 三角剖分的基础上转化为网格曲面实现三维重建, 在经过对初始网格的 Voronoi 过滤去除不属于点云的三角面片, 之后经过法向去除部分错误三角面片。但当面对物体表面出现曲率过大的复杂曲面时, 即是点云中真实尖锐点, 采用法向量并不能很好的去除所有错误的三角面片, 导致三维重建后的效果不佳。基于此提出一种四面体网格优化算法, 该算法在对法向量夹角筛选过后, 计算四面体外接球半径与此四面体三角形中最短边长比值阈值进行狭长三角面的剔除, 达到四面体网格的优化, 使三维模型网格拓扑结构更加均匀, 网格模型更加完善。

假设外接球半径为  $R$ , 最短边长为  $L_{\min}$ ;  $\rho$  为四面体  $T_e$  的半径与最短边的比;  $\rho(T_e) = R/L_{\min}$ , 则可以求出三角形最小角的角度值。

$$\alpha = \arcsin[(L_{\min}/2)/R] \quad (11)$$

从上式可以看出,  $\rho(T_e)$  越小, 三角形角度越大, 越接近正三角形。用此来筛选网格单元, 在对三角网格进行优化时设置阈值, 删除大于阈值的网格单元, 从而完成网格优化处理, 改善网格整体质量。

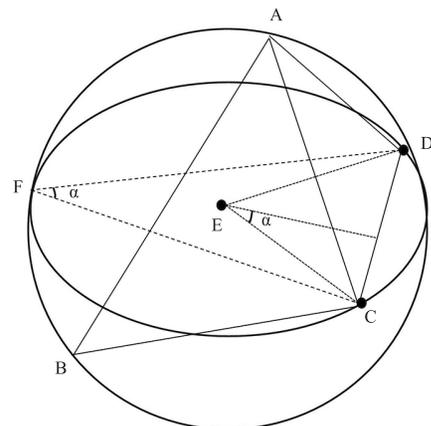


图 4 四面体外接圆示意图

Fig. 4 Schematic diagram of the outer circle of tetrahedron

### 3.5 改进 Delaunay 三角剖分的 Crust 算法流程

传统的 Crust 重建算法是以 Voronoi 图和 Delaunay 三角剖分为基础上进行网格模型构建, 针对算法对点云在三角剖分时消耗大量时间并且对四点共圆现象准则失效, 使用自适应外接圆的方法来提高算法的效率; 另外在对物体表面出现曲率过大的复杂曲面时进行三维网格模型重建时, 算法不能很好的去除错误的三角面片, 采用四面体网格模型优化算法进行狭长三角面的去除以达到优化三角网的目的。

的。具体步骤流程如下：

(1)对原始激光点云与影像点云采用体素重心临近特征点下采样算法,完成保留特征的点云简化并且保持密度均匀。

(2)采用 MLS 方法对点云进行平滑优化。

(3)采用自适应外接圆法对点云和极点进行三角剖分,得到初始的三角网格曲面,然后采用 Voronoi 过滤和法向过滤去除不合格的三角面片。

(4)针对存在真实尖锐点的情况,采用 Delaunay 四面体网格模型优化算法进行优化,实现建立更高质量的三维网格模型。

#### 4 实验验证与精度分析

为了验证本文算法的可行性与有效性,实验数据采用配准后雕塑的激光点云和影像点云,如图 5 所示。基于 Windows10 操作系统,硬件配置为 Intel Core I7, 16 G内存,基于 PCL1. 8. 1、CMAKE、boost、OpenMVS 等算法库,并结合 C++ 编程语言在 VS2017 开发平台进行实验。



图 5 实验数据

Fig. 5 Experimental data

为了体现出改进算法的性能,把本文算法与泊松重建算法<sup>[16]</sup>、贪婪投影算法<sup>[17]</sup>和传统的 Crust 算法<sup>[18]</sup>的重建时间进行对比。如表 1 所示。从表中可以看出三种对比算法中泊松算法耗时长于贪婪投影算法、传统的 Crust 算法和本文算法。这是因为在使用泊松重建算法进行三维重建时需使用移动立方体算法提取等值面,所以耗时更长。改进算法的平均重建耗时相较于泊松算法减少了约 38.3%,相较于贪婪投影算法减少约 27.9%,相较于传统的 Crust 算法的平均重建耗时减少了约 34%,速度提升明显。

将两组雕塑点云分别采用泊松重建算法、贪婪

投影算法、传统 Crust 算法和本文算法进行三维模型构建效果对比。重建结果如图 6、7 所示。

表 1 四种算法耗时对比

Tab. 1 Time consuming comparison of four algorithms

算法	时间/s	
	雕塑 1 点云数据	雕塑 2 点云数据
泊松算法	130.41	124.55
贪婪投影算法	116.84	101.46
传统 Crust 算法	122.68	119.51
本文算法	83.18	74.20

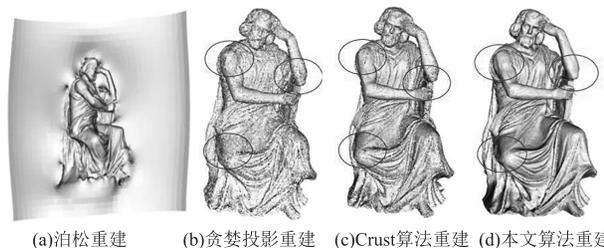


图 6 雕塑 1 三维重建结果

Fig. 6 3D reconstruction results of sculpture 1

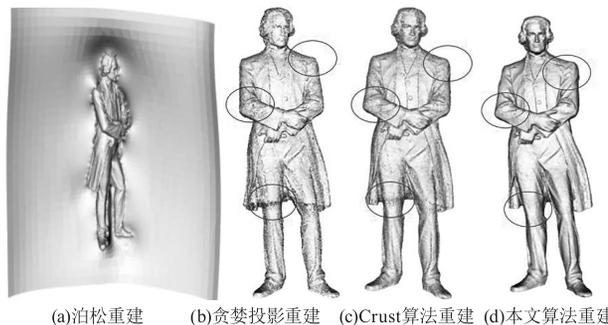


图 7 雕塑 2 三维重建结果

Fig. 7 3D reconstruction results of sculpture 2

从图 6(a)和图 7(a)中可以看出,泊松算法在对两雕塑进行三维重建时出现了伪平面并且从视觉效果上来看不如贪婪投影算法和 Crust 算法重建的效果,这是因为泊松算法对封闭点云适用;对于图 6(b)和图 7(b)来说,采用贪婪投影算法进行重建时需要将三维点云投影到二维平面上,在完成三角剖分后映射到三维空间,由于两雕塑点云结构复杂,所以模型表面会出现孔洞并且表面较为粗糙;对于图 6(c)和图 7(c),采用传统的 Crust 算法进行三维重建,虽然在经过体素重心临近特征点下采样和移动最小二乘法平滑优化后,视觉效果上稍优于泊松重建和贪婪投影重建,但仍然由于算法的特性,表面稍微粗糙且在细节处和边缘处会出现孔洞。最后使用本文算法和传统 Crust 算法重建结果进行分析,

对比图 6、图 7 的(c)(d)可以发现,在雕塑 1 和雕塑 2 点云数据的肩膀、肘部和膝盖处保证了细节的不丢失,并且孔洞有所减少和平滑度有所提升,保持了较高的网格细节。综合看出采用本文算法进行三维重建时,在缩短重建时间的基础上,有效的减少了孔洞的产生和提高了三维模型的平滑度、细节表达效果更好。

从以上实验结果来看,对于复杂的点云数据,使用泊松算法、贪婪投影算法、传统 Crust 算法进行重建时,得到的三维模型在细节与平滑度上效果均有所提高,而使用本文改进算法进行重建时,所得模型的视觉效果要更优。为了更直观的将偏差显示,本文采用色谱图方式可视化重建精度。如图 8 所示。在此基础上通过定量分析对算法的耗时对比、计算原始点云到模型实体的最大偏差距离、平均偏差距离、标准差和均方根误差以此对模型进行综合的精度分析。如表 2、表 3 所示。对于采集的雕塑数据,由于其结构复杂,本文在精度上相较于泊松算法平均提升了 1.97 mm,相较于贪婪投影平均提升了 1.51 mm,相较于传统算法平均提升了 1.09 mm。

通过分析可以得出本文算法满足精度要求。

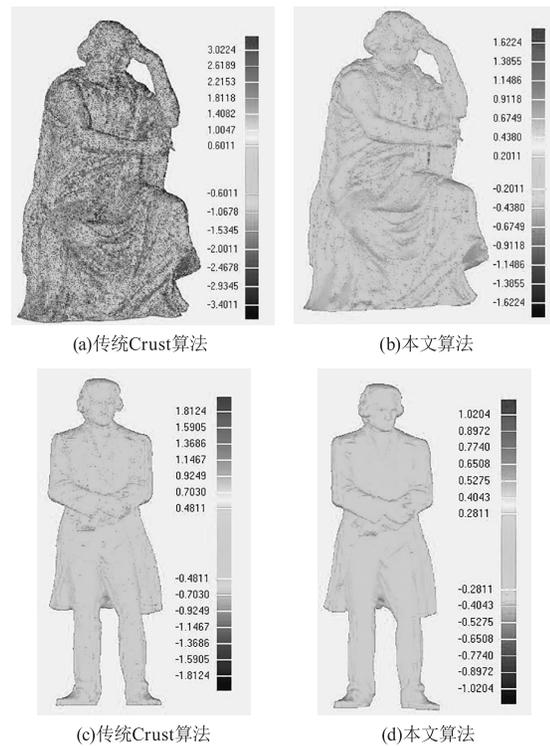


图 8 偏差色谱图

Fig. 8 Deviation chromatogram

表 2 雕塑 1 模型精度分析

Tab. 2 Model accuracy analysis of sculpture 1

算法	最大偏差距离/mm	平均偏差距离/mm	标准偏差/mm	均方根误差/mm
泊松算法	3.64	1.25	0.89	0.86
贪婪投影算法	3.47	0.96	0.77	0.68
传统 Crust 算法	3.02	0.78	0.64	0.46
本文算法	1.62	0.61	0.34	0.35

表 3 雕塑 2 模型精度分析

Tab. 3 Model accuracy analysis of sculpture 2

算法	最大偏差距离/mm	平均偏差距离/mm	标准偏差/mm	均方根误差/mm
泊松算法	2.94	0.76	0.75	0.88
贪婪投影算法	2.18	0.59	0.68	0.71
传统 Crust 算法	1.81	0.43	0.52	0.56
本文算法	1.02	0.31	0.36	0.28

## 5 结 语

针对基于 Delaunay 三角剖分的 Crust 算法进行复杂曲面三维重建时存在模型表面不够光滑、耗时长、精度不高的问题,提出采用体素重心临近特征点算法进行下采样,之后使用移动最小二乘算法完成数

据平滑与优化,然后使用基于自适应外接圆 Delaunay 三角剖分方法的 Crust 算法进行重建,得到粗三角网格,最后对得到的 Delaunay 网格模型采用四面体的外接球半径与其最短边长的比值剔除不合格 Delaunay 四面体完成点云的重建。通过两组雕塑点云进

行验证,相较于泊松重建算法、贪婪投影算法和传统 Crust 算法,平均重建耗时减少约 38.3%、27.9% 和 34% 缩短了重建时间,精度和平滑度都有明显提高,得到了更好的重建结果。但是仍没有达到孔洞的完全修复,因此对孔洞的修复有待进一步研究。

#### 参考文献:

- [1] Zhang Zuxun, Tao Pengjie. An overview on "Cloud Control" photogrammetry in big data era[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2017, 46(10): 1238 - 1248. (in Chinese)  
张祖勋,陶鹏杰. 谈大数据时代的“云控制”摄影测量[J]. *测绘学报*, 2017, 46(10): 1238 - 1248.
- [2] Chen Jun, Liu Jianjun, Tian Haibo. Basic directions and technological path for building 3D realistic geospatial scene in China[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2022, 47(10): 1568 - 1575. (in Chinese)  
陈军,刘建军,田海波. 实景三维中国建设的基本定位与技术路径[J]. *武汉大学学报:信息科学版*, 2022, 47(10): 1568 - 1575.
- [3] Qiu Chunli. Research on surface reconstructing technology of point cloud data[D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2014: 18 - 31. (in Chinese)  
邱春丽. 基于点云的曲面重建技术研究[D]. 北京: 北京交通大学, 2014: 18 - 31.
- [4] Akemi Galvez, Andres Iglesias. Particle swarm optimization for non-uniform rational B-spline surface reconstruction from clouds of 3D data points[J]. *Information Sciences*, 2012, 192: 174 - 192.
- [5] Wang Wenyan, Zhang Yongjie. Walets-based NURBS simplification and fairing[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199(5): 290 - 300.
- [6] Xu Limin, Wu Gang. Review of implicit surface reconstruction from point cloud dataset[J]. *Computer Science*, 2017, 44(S2): 19 - 23 + 28.
- [7] Li Xiaobin, Lin Zhijun, Yang Xi. Research on 3D real scene fusion modeling based on laser scanning and oblique photography[J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2021, 42(8): 166 - 170. (in Chinese)  
李晓斌,林志军,杨玺,等. 基于激光扫描和倾斜摄影技术的三维实景融合建模研究[J]. *激光杂志*, 2021, 42(8): 166 - 170.
- [8] Bybee T C, Budge S E. Method for 3-D scene reconstruction using fused LiDAR and imagery from a texel camera[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2019, 57(11): 8879 - 8889.
- [9] Li S, Yao Y, Fang T, et al. Reconstructing thin structures of manifold surfaces by integrating spatial curves[C]// 2018 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2018: 2887 - 2896.
- [10] Wang Xia. 3D reality modeling of laser point cloud based on fusion sequence image[D]. Xuzhou: China University of Mining and Technology, 2019. (in Chinese)  
汪霞. 融合序列影像的激光点云三维实景建模[D]. 徐州: 中国矿业大学, 2019.
- [11] He Shiwei, Wang Jian, Liu Yu. Complex surface reconstruction based on laser point cloud and inclined image[J]. *Applied Laser*, 2021, 41(4): 909 - 915. (in Chinese)  
何士伟,王健,刘宇. 基于激光点云与倾斜影像的复杂表面重建[J]. *应用激光*, 2021, 41(4): 909 - 915.
- [12] Chen Zhe, Wang Jian, Liang Zhouyan, et al. Automatic modeling of point cloud grid with improved Crust algorithm[J]. *Science of Surveying and Mapping*, 2018, 43(12): 98 - 104, 117. (in Chinese)  
陈喆,王健,梁周雁,等. Crust 改进算法的点云网格自动构建[J]. *测绘科学*, 2018, 43(12): 98 - 104, 117.
- [13] Cai Wenna. Research on three-dimensional reconstruction based on LiDAR[D]. Tianjin: Tianjin University of Technology, 2018. (in Chinese)  
蔡文娜. 基于激光雷达的三维重建研究[D]. 天津: 天津理工大学, 2018.
- [14] Zhao Chunyan, Li Jiping, Yuan Xiaohong, et al. Forest spatial pattern analysis of Tyson polygon and Delauney triangulation network[J]. *Science of Surveying and Mapping*, 2014, 39(10): 76 - 80. (in Chinese)  
赵春燕,李际平,袁晓红,等. 泰森多边形和狄洛尼三角网的林木空间格局分析[J]. *测绘科学*, 2014, 39(10): 76 - 80.
- [15] Mirzaee F, Solhi E, Samadyar N. Moving least square and spectral collocation method to approximate the solution of stochastic Volterra-Fredholm integral equations-Science Direct[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2021, 161: 275 - 285.
- [16] Kazhdan M, Bolitho M, Hoppe H. Poisson surface reconstruction[J]. *ACM Trans. Graph*, 2013, 32(1): 1 - 13.
- [17] Z C Marton, R B Rusu, M Beetz, et al. On fast surface reconstruction methods for large and noisy point clouds[C]// 2009 International Conference on Robotics and Automation. Washington DC, USA: IEEE, 2009: 3218 - 3223.
- [18] AMENTA N, CHOI S, KOLLURI R K. The power crust, unions of balls, and the medial axis transform[J]. *Computational Geometry (Theory and Applications)*, 2001, 19(2): 127 - 153.